指 定 科 目 考 試 模 擬 試 題 題 本

數 學 甲 考 科

教師用

〈測驗範圍〉高中數學 一、二、三年級

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：● 選擇題答案請填入後面之答案欄中。

● 非選擇題用黑色或藍色筆，在「作答區」上作答。

◎註：1. 答錯不倒扣。

2. 此份試題本為模擬指定科目考科之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

【出處】南一版《數學甲指考王模擬試題》

祝考試順利

南一書局

第壹部分：選擇題（佔 74 分）

一、單選題（佔 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(3) 1. 在坐標平面上，設 P 為 $y=x^2+x-2$ 圖形上一點。若 P 的 x 坐標為 $\log_{\frac{1}{2}}3$，則 P 點的位置在

(1) 第一象限　(2) 第二象限　(3) 第三象限

(4) 第四象限　(5) 坐標軸上

〔解析〕$\log_{\frac{1}{2}}3=-\log_2 3<0$，

又 P 的 y 坐標為 $y=(\log_{\frac{1}{2}}3)^2+\log_{\frac{1}{2}}3-2=(\log_2 3)^2-\log_2 3-2=(\log_2 3+1)(\log_2 3-2)$，

因 $\log_2 3+1>0$，$\log_2 3-2=\log_2 3-\log_2 4<0$，

故 P 的 y 坐標小於 0，於是 P 點在第三象限。

所以正確選項為(3)。

(5) 2. 設 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}$，且 $|z^{n+1}-z^n|=a_n$，其中 n 為正整數，試問下列各選項哪一個是正確的？

(1) 滿足 $z^k>0$ 的最小正整數 k 之值為 12　(2) $<a_n>$ 為等比數列，公比是 $\dfrac{1}{4}$　(3) $a_6>\dfrac{1}{64}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n>1$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n<1$

〔解析〕(1) $z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow z^k=2^{-k}\left(\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3}\right)>0$，

故 $k=6t$，$t\in Z$，於是最小正整數 k 之值是 6。

(2) $a_n=|z^{n+1}-z^n|=|z^n||z-1|=\dfrac{1}{2^n}\left|\dfrac{-3+\sqrt{3}\,i}{4}\right|=\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$，

故 $<a_n>$ 是等比數列，首項是 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，公比是 $\dfrac{1}{2}$。

(3) $a_6=\dfrac{\sqrt{3}}{2^7}=\dfrac{1}{2^6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{1}{64}$。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]<1$。

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$。

所以正確選項為(5)。

(5) 3. 擲一公正骰子 3 次，則在前 2 次點數和等於第 3 次點數的條件下，至少有 1 個 2 點的機率為

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{7}{12}$ (5) $\frac{8}{15}$

〖解析〗設 A 為前 2 次點數和等於第 3 次點數之事件，
B 為至少有 1 個 2 點事件，
A 事件之情形有

1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
5	4	3	2	1	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1
		6				5				4		3		2

$\Rightarrow P(A)=\frac{15}{216}$。
表列之中至少有一個 2 點的情形有 8 種

$\therefore P(A\cap B)=\frac{8}{216}$，故所求 $=P(B\,|\,A)=\frac{\frac{8}{216}}{\frac{15}{216}}=\frac{8}{15}$。

二、多選題（佔 32 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(3)(4) 4. 空間坐標中三點 $A(1,1,1)$，$B(0,2,2)$，$C(2,0,3)$，則以下哪些選項是正確的？

(1) $\triangle ABC$ 是銳角三角形

(2) $\triangle ABC$ 面積為 $3\sqrt{2}$

(3) $\triangle ABC$ 平面方程式為 $x+y=2$

(4) 若平面 ABC 與平面 $E：x+y-2z=0$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

(5) $\triangle ABC$ 在平面 $E：x+y-2z=0$ 上的正射影面積為 $\sqrt{6}$

〖解析〗(1) $\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=\sqrt{6}$，
$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2\Rightarrow\triangle ABC$ 為直角三角形。

(2) $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

(3) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1,2)$
$\Rightarrow$ 平面 ABC 法向量：$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=3(1,1,0)$
$\Rightarrow$ 平面 ABC 方程式：$x+y=2$。

(4) 平面 E 法向量 $\vec{n'}=(1,1,-2)$，若平面 ABC 與平面 E 夾角為 θ，
則 $\cos\theta=\pm\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}||\vec{n'}|}=\pm\frac{6}{6\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

(5) $\triangle ABC$ 在 E 上投影面積 $=\triangle ABC$ 面積 $\times|\cos\theta|=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

(2)(4)(5) 5. 空間中，以下哪些方程式的圖形表一直線？

(1) $x-2y=3$　　(2) $\begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+4y-6z=3 \end{cases}$　　(4) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

(5) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}$，$z=5$

〖解析〗(1) $x-2y=3$ 表一平面。

(2) $\begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$ 直線兩面式。

(3) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+4y-6z=3 \end{cases}$ 兩平行平面，無圖形。

(4) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 直線比例式。

(5) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}$，$z=5$ 直線兩面式。

(1)(2) 6. 設多項式函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的定積分 $\int_a^b 3f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=5$，$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=3$，下列關於定積分的敘述哪些是正確的？

(1) $\int_a^b 3f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=3\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx=2$

(3) $\int_a^b 2g(x)\,dx=2$

(4) 函數 $y=g(x)$ 的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸圍成的區域面積為 1

(5) $\int_a^b [3f(x)-4g(x)]\,dx=2$

〖解析〗$\because$ $\int_a^b 3f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=5$，$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=3$

根據定積分的運算性質

$\therefore 3\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=5$ 且 $\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=3$

得知 $\int_a^b f(x)\,dx=2$，$\int_a^b g(x)\,dx=-1$。

(1) $\int_a^b 3f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=3\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$，正確。

(2) $\int_a^b f(x)\,dx=2$，正確。

(3) $\int_a^b 2g(x)\,dx=2\int_a^b g(x)\,dx=-2$。

(4) 因為 $\int_a^b g(x)\,dx=-1$，所以根據定積分的意義，

函數 $y=g(x)$ 的圖形在 x 軸上方的面積和減去在 x 軸下方的面積和等於 -1，

因此函數 $y=g(x)$ 的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸所圍成的區域面積不一定為 1。

(5) $\int_a^b [f(x)-4g(x)]\,dx=3\int_a^b f(x)\,dx-4\int_a^b g(x)\,dx=10$。

(1)(2)(3)(4)(5) 7. 某校三千多名學生中有 36%是男生，每次作數學能力抽測時，都要從學生中選出 400 人作測驗，令 X 表每次抽選時的男生人數，μ 表各次之 X 值的期望值，σ_x 表 X 值的標準差，下列敘述何者正確？

(1) $\mu=144$

(2) X 值的變異數為 92.16

(3) $\sigma_x=9.6$

(4) μ 與全校之總人數多寡無關

(5) σ_x 與全校之總人數多寡無關

〖解析〗(1) $\mu=np=400\times 36\%=144$。

(2) $\sigma_x{}^2=np(1-p)=400\times 36\%\times 64\%=92.16$。

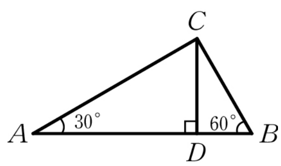
(3) $\sigma_x=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{400\times 36\%\times 64\%}=20\times 0.6\times 0.8=9.6$。

(4)(5) μ 與 σ_x 顯然只與抽選之人數 400 人有關，與全校總人數無關。

三、選填題（佔 24 分）

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡上「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8 ～17)。 2. 每格完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 如右圖，甲、乙兩人分別在地面 A，B 兩點仰望一棵古樹，測得樹頂端 C 的仰角依次為 30°與 60°，且 A，B 與樹底 D 在同一直線上，若 $\overline{AB}=50$ 公尺，則這棵古樹的高度是 $\dfrac{⑧⑨\sqrt{⑩}}{2}$ 公尺。



〖解析〗設 $\overline{CD}=x$ 公尺，

則 $\cot 30°=\dfrac{\overline{AD}}{x}\Rightarrow \overline{AD}=x\cot 30°=\sqrt{3}x$，

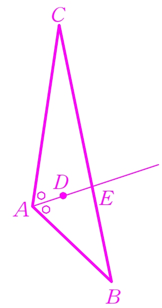
$\cot 60°=\dfrac{\overline{BD}}{x}\Rightarrow \overline{BD}=x\cot 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

因 $\overline{AD}+\overline{BD}=\overline{AB}$，故 $\sqrt{3}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=50\Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{3}}x=50$

$\Rightarrow x=50\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$，所以樹高是 $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ 公尺。

B．平面上三點 $A(0,0)$，$B(3,-3)$，$C(1,7)$，已知 D 點在 $\angle A$ 的角平分線上，若將 $\overrightarrow{AD}$ 表成 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的線性組合，得 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，其中 $x+y=\dfrac{1}{2}$，則 D 點的坐標為 $\left(\dfrac{⑪}{⑫},\dfrac{⑬}{⑭}\right)$ 。

【解析】設 $\overleftrightarrow{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E，因為 $\overline{AE}$ 為 $\angle A$ 的角平分線，



所以 $\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3\sqrt{2}:5\sqrt{2}=3:5$，

故 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

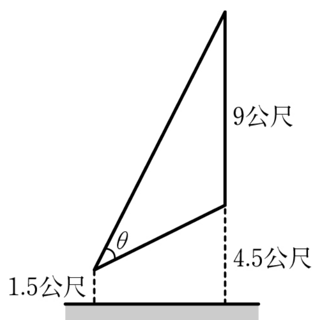
設 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=k\left(\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{5k}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3k}{8}\overrightarrow{AC}$，

因為 $x+y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{5k}{8}+\dfrac{3k}{8}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$，

故 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{16}(3,-3)+\dfrac{3}{16}(1,7)=\left(\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{8}\right)$，

即 D 坐標為 $\left(\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{8}\right)$

C．某人到美術館參觀一幅巨大壁畫，壁畫高 9 公尺，其下端離地面 4.5 公尺，而此人眼睛距地面 1.5 公尺（如右圖），若他站在離牆 a 公尺處，觀賞此畫可有最大視角 θ，則 $a=$ ⑮ ，$\tan\theta=\dfrac{⑯}{⑰}$ 。



【解析】如右圖，壁畫高 $\overline{AB}=9$ 公尺，

以眼睛所在位置 D 作水平線 L。

今以 $\overline{AB}$ 為一弦，作一圓與 L 相切於 D 點，

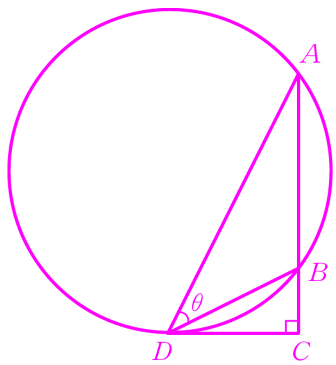
又直線 AB 與直線 L 交於 C 點，則視角 $\angle ADB=\theta$ 最大。

由圓冪定理知

$\overline{CD}^2=\overline{CB}\times\overline{CA}=3\times12=36\Rightarrow\overline{CD}=6$，即 $a=6$。

令 $\angle ADC=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，則 $\tan\alpha=\dfrac{12}{6}$，$\tan\beta=\dfrac{3}{6}$，於是

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{12}{6}-\frac{3}{6}}{1+\frac{12}{6}\times\frac{3}{6}}=\dfrac{54}{72}=\dfrac{3}{4}$。



第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、甲、乙兩人以「剪刀、石頭、布」猜拳 5 次，兩人的策略都是：

如果這一次出拳猜贏，下一次出相同的拳；

如果這一次出拳猜輸，下一次從另外兩拳擇一出拳，兩拳的選擇機率相同；

如果這一次出拳平手，下一次從「剪刀、石頭、布」擇一出拳，且選擇的機率相同。

若第一次甲、乙平手，求第 3 次兩人平手的機率。（13 分）

〖解析〗① 前一次甲、乙平手，下一次平手的機率$=\frac{1}{3}$，甲贏的機率$=\frac{1}{3}$，乙贏的機率$=\frac{1}{3}$

② 前一次甲贏，下一次平手的機率$=\frac{1}{2}$，甲贏的機率$=0$，乙贏的機率$=\frac{1}{2}$

③ 前一次乙贏，下一次平手的機率$=\frac{1}{2}$，甲贏的機率$=\frac{1}{2}$，乙贏的機率$=0$

故轉移矩形 $T=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{平手} & \text{甲贏} & \text{乙贏}\end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l}\text{平手}\\ \text{甲贏}\\ \text{乙贏}\end{array}$

因第一次平手，令 $X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$X_2=TX_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$X_3=TX_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}\\ \frac{5}{18}\\ \frac{5}{18}\end{bmatrix}$，

故第 3 次平手的機率為$\frac{4}{9}$。

二、設多項式函數 $f(x)=\int_1^x 12t(t+1)(t-2)\,dt$，試回答下列兩個小題：

(1) 求 $f(x)$。（6 分）

(2) 試求 $f(x)$ 的最小值。（7 分）

〖解析〗(1) $\int_1^x 12t(t+1)(t-2)\,dt=12\int_1^x (t^3-t^2-2t)\,dt=12\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3-t^2\right)\Big|_1^x=3x^4-4x^3-12x^2+13$，

故 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+13$。

(2) $f'(x)=12(x^3-x^2-2x)=12x(x-2)(x+1)$

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	遞減		遞增		遞減		遞增

由上表可知 $f(-1)=8$，$f(2)=-19$ 為極小值。

因為 $f(x)$ 為四次函數，故最小值存在，

因此 $f(2)=-19$ 為最小值。