0-1 平方與根號

1. 平方根：

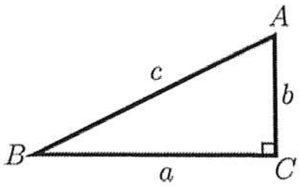
設 $a, x > 0$，且 $x^2 = a$，則 $x=\sqrt{a}$。

2. 畢氏定理：

直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 是直角。

a, b, c 分別是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長，

則 $c^2=a^2+b^2$。



EXAMPLE 1

設 $x > 0$，解方程式的 x 值：

(1) $x^2 = 4$　(2) $x^2 = 7$　(3) $x^2 = 10$

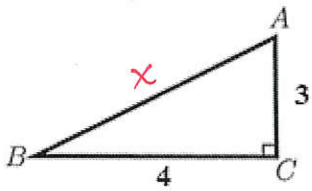
(1) $x=\sqrt{4}=2$

(2) $x=\sqrt{7}$

(3) $x=\sqrt{10}$

EXAMPLE 2

求三角形的邊長 $\overline{AB}$。

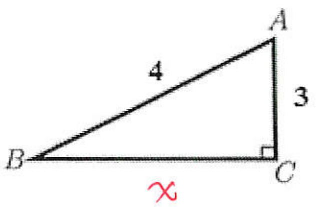


$x^2=3^2+4^2=9+16=25$

$x=\sqrt{25}=5$

EXAMPLE 3

求三角形的邊長 $\overline{BC}$。



$4^2=x^2+3^2$

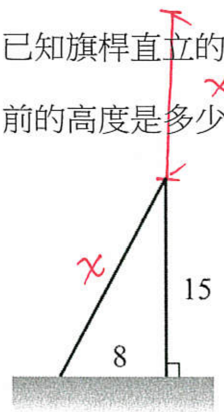
$\Rightarrow 16=x^2+9$

$\Rightarrow x^2=16-9=7$

$\Rightarrow x=\sqrt{7}$

EXAMPLE 4

如下圖，有一垂直豎立於地面之旗桿，因颱風來襲而吹折，桿頂著地，著地處和桿底相距 8 公尺，已知旗桿直立的部分是 15 公尺，則此旗桿未折斷前的高度是多少公尺。



旗桿長 $=15+x$

$x^2=15^2+8^2=225+64=289$

$x=\sqrt{289}=17$

旗桿長 $=15+17=32$ (公尺)

0-2 等量公理

1. 等量加法公理

(1)加法：$x+a=b \Rightarrow x=$ $\underline{b-a}$

(2)減法：$x-a=b \Rightarrow x=$ $\underline{b+a}$

(3)乘法：$a\cdot x=b \Rightarrow x=$ $\underline{\frac{b}{a}}$

(4)除法：$\frac{x}{a}=b \Rightarrow x=$ $\underline{b\cdot a}$

EXAMPLE 1

解下列各方程式：

(1) $x+1=2$ (2) $x-1=4$ (3) $2x=4$ (4) $\frac{x}{3}=2$ (5) $5-x=2$ (6) $\frac{6}{x}=2$

(1) $x=2-1=1$

(2) $x=4+1=5$

(3) $x=\frac{4}{2}=2$

(4) $x=2\times3=6$

(5) $-x=2-5=-3$

$x=3$

(6) $6=2\cdot x \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$

EXAMPLE 2

解下列各方程式：

(1) $2x+1=5$ (2) $\frac{x-1}{2}=5$ (3) $3-\frac{x}{2}=1$

(1) $2x=5-1=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2$

(2) $x-1=5\times2=10 \Rightarrow x=10+1=11$

(3) $-\frac{x}{2}=1-3=-2 \Rightarrow \frac{x}{2}=2 \Rightarrow x=2\times2=4$

1-1 數系

1. 數系：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\text{正整數(N)}\\ 0\\ \text{負整數}\end{array}\right\}\text{整數(Z)}\\ \text{分數 (有限小數.循環小數)}\end{array}\right\}\text{有理數(Q)}\\ \text{無理數 (無限不循環小數)}\end{array}\right\}\text{實數(R)}$$

2. 循環小數化分數：$0.\overline{ab}=\dfrac{ab}{99}$、$0.a\overline{bc}=\dfrac{abc-a}{990}$、$a.\overline{bc}=\dfrac{abc-a}{99}$。

<規則>分子：全部的數減去不部循環的數。

分母：小數點後有循環的寫 9，沒循環的寫 0。

EXAMPLE 1

下列哪些選項是有理數？

(1)0 (2)2 (3)$\dfrac{1}{3}$ (4)$\sqrt{2}$ (5)π

有理數：可以化成分數的數

故選(1)(2)(3)

EXAMPLE 2

將下列的小數化成分數：

(1)0.12 (2)$0.\overline{23}$ (3)$1.\overline{2}$

(1) $0.12=\dfrac{12}{100}$

(2) $0.\overline{23}=\dfrac{23}{99}$

(3) $1.\overline{2}=\dfrac{12-1}{9}=\dfrac{11}{9}$

EXAMPLE 3

設 a,b 均為正整數且 $\dfrac{b}{a}=0.2\overline{3}$，求 $a-b$ 的最小值。

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{23-2}{90}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$

故 $a-b$ 最小值 $=30-7=23$

EXAMPLE 4

有關循環小數，下列何者正確？

(1)$0.\overline{3}+0.\overline{7}=1.\overline{1}$ (2)$0.\overline{45}+0.\overline{55}=1$

(3)$0.\overline{2}+0.\overline{3}=0.\overline{5}$ (4)$0.\overline{9}=1$

(1) $0.\overline{3}+0.\overline{7}=\dfrac{3}{9}+\dfrac{7}{9}=\dfrac{10}{9}$ (o)

$1.\overline{1}=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}$

(2) $0.\overline{45}+0.\overline{55}=\dfrac{45}{99}+\dfrac{55}{99}=\dfrac{100}{99}\neq 1$ (x)

(3) $0.\overline{2}+0.\overline{3}=\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{5}{9}$, $0.\overline{5}=\dfrac{5}{9}$ (o)

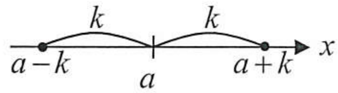
(4) $0.\overline{9}=\dfrac{9}{9}=1$ (o) 選(1)(3)(4)

1-2 絕對值

1. 距離：設 A,B 兩點在數線上的坐標分別為 a,b，則 A,B 兩點間的距離 $\overline{AB}=\underline{\;|b-a|\;}$。

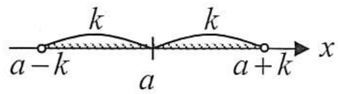
2. 絕對值

(1) $|x|$　　表示 x 到原點的距離　　(3) $|x-a|=k$



得 $x=a+k$ 或 $a-k$

(2) $|x-a|$　　表示 x 到點 a 的距離　　(4) $|x-a|<k$

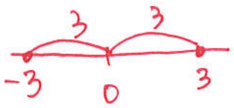


得 $a-k<x<a+k$

EXAMPLE 1

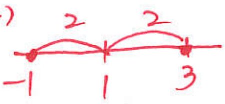
解下列方程式：(1) $|x|=3$　(2) $|x-1|=2$　(3) $|x+1|=3$　(4) $|2x-1|=3$

(1)



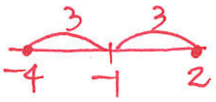
$x=\pm 3$

(2)



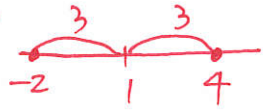
$x=-1$ 或 3

(3) $|x-(-1)|=3$



$x=-4$ 或 2

(4)



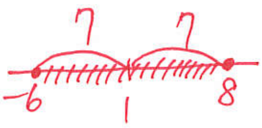
$2x=-2$ 或 4

$x=-1$ 或 2

EXAMPLE 2

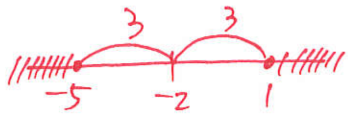
解下列不等式：(1) $|x-1|<7$　(2) $|x+2|\geq 3$

(1)



$-6<x<8$

(2) $|x-(-2)|\geq 3$



$x\leq -5$ 或 $x\geq 1$

2-1 坐標平面

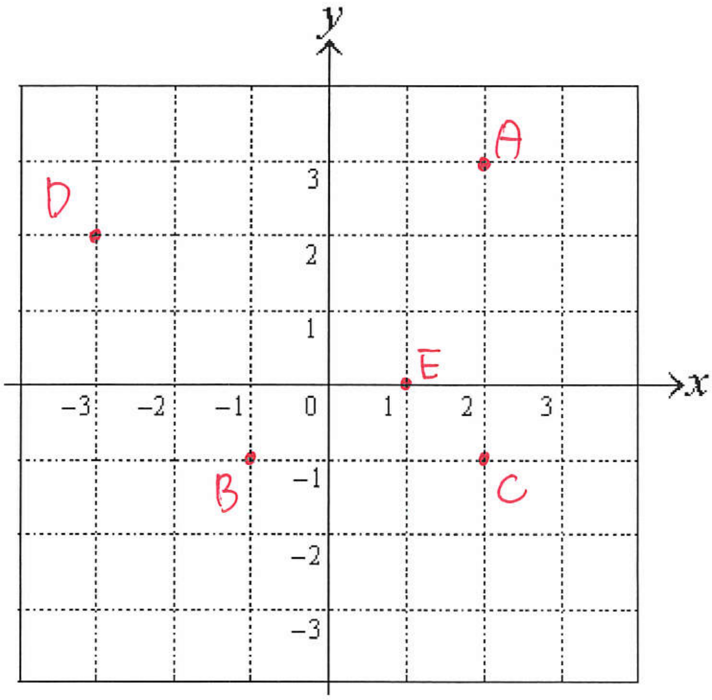
1. 兩點的距離：

設 $A(a_1,a_2)$ ， $B(b_1,b_2)$ ，則 A,B 兩點間的距離 $\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ 。

EXAMPLE 1

在坐標平面上，標示下列各點坐標：

(1) $A(2,3)$ (2) $B(-1,-1)$ (3) $C(2,-1)$ (4) $D(-3,2)$ (5) $E(1,0)$



EXAMPLE 2

(1)已知 $A(2,3)$ 、 $B(-1,-1)$ ，求 $\overline{AB}$ 的長度。 (2)已知 $C(2,3)$ 、 $D(1,1)$ ，求 $\overline{CD}$ 的長度。

$\overline{AB}=\sqrt{[2-(-1)]^2+[3-(-1)]^2}$
$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{CD}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

EXAMPLE 3

下列各點分別在第幾項限？(1) $A(2,3)$ (2) $B(-1,-1)$ (3) $C(2,-1)$ (4) $D(-3,2)$

A:第一象限 B:第三象限 C:第四象限 D:第二象限

2-2 直線方程式

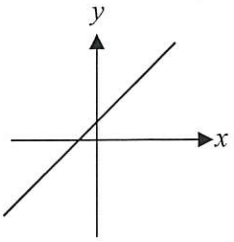
1. 直線的斜率：

(1)設 $A(a_1,a_2)$ ，$B(b_1,b_2)$ ，則直線 $\overline{AB}$ 的斜率為 $\dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$ 。

(2)直線 $y=mx+b$ 的斜率為 m 。

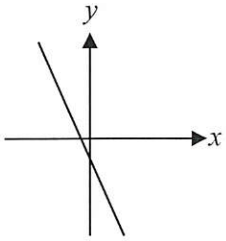
2. 直線斜率值的意義：

(1)正負：表示 方向



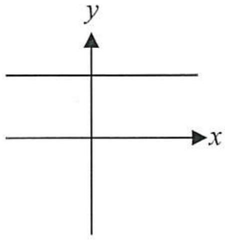
(右上)

m > 0



(右下)

m < 0



(水平線)

m = 0

(2)數值大小($|m|$)：傾斜程度

$|m|$越大，表示直線越 斜 。

3. 直線方程式：點 和 斜率

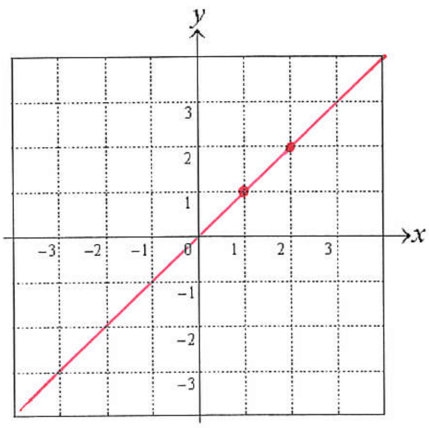
設直線 L 的斜率為 m 且過點 (x_0,y_0) ，則 L 的方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$ 。

EXAMPLE 1

在坐標平面上，描繪下列各直線方程式，並寫出各直線的斜率。

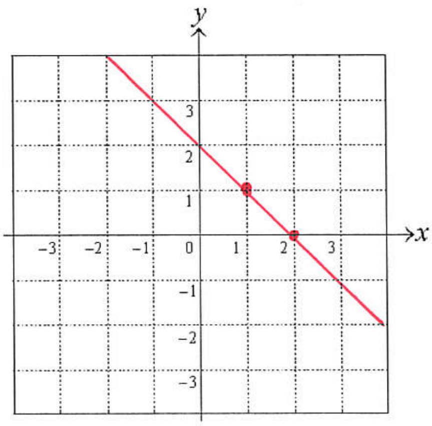
(1) $y=x$

x	1	2
y	1	2



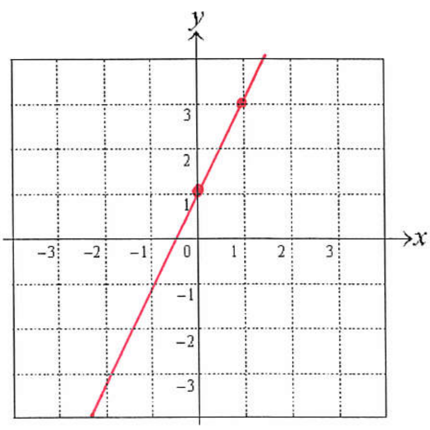
(2) $y=-x+2$

x	1	2
y	1	0



(3) $y=2x+1$

x	0	1
y	1	3



EXAMPLE 2

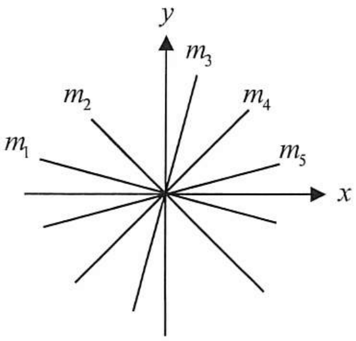
求下列直線 L 的斜率：

(1)直線 L 過點 $(2,1)$ 、 $(-3,4)$　(2)直線 L 過點 $(3,5)$ 、 $(2,7)$　(3)直線 L 的方程式為 $y=5x+1$

$m=\frac{4-1}{2-(-3)}=\frac{3}{5}$　$m=\frac{7-5}{2-3}=-2$　$m=5$

EXAMPLE 3

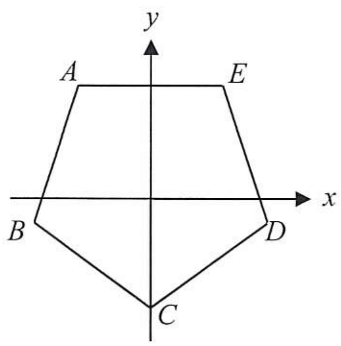
試比較下圖各直線斜率 m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 的大小。



$m_3>m_4>m_5>0>m_1>m_2$

EXAMPLE 4

試比較下圖各直線斜率 $m_{AB},m_{BC},m_{CD},m_{DE},m_{EA}$ 的大小。



$m_{AB}>m_{CD}>m_{AE}>m_{BC}>m_{DE}$

$m_{AE}=0$

EXAMPLE 5

利用下列條件，求出各小題的直線方程式：

(1)直線斜率 $m=3$ 且過點 $(1,2)$　(2)直線過點 $(2,3)$ 、 $(1,1)$

(1) $y-2=3(x-1)$

(2) $m=\frac{3-1}{2-1}=2$

$y-1=2(x-1)$

2-3 兩直線的交點

1. 兩直線的交點

設 $L_1: ax+by=c$ 和 $L_2: dx+ey=f$ 的交點坐標即為 解聯立方程式 。

EXAMPLE 1

解聯立方程式，求下列各方程式的 x, y 值：

(1) $\begin{cases} x+3y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

$-)$

$2y=2$

$\Rightarrow y=1$

$x+1=2,\ x=2-1$
$=1$

$(x,y)=(1,1)$

(2) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x+y=5 \end{cases}$

$2x+3y=12$

$-)\ 2x+2y=10$

$y=2$

$x+2=5,\ x=5-2$
$=3$

$(x,y)=(3,2)$

(3) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

$2x+2y=6$

$-)\ 2x+y=5$

$y=1$

$x+1=3,\ x=3-1$
$=2$

$(x,y)=(2,1)$

EXAMPLE 2

求 $L_1: x+2y=4$ 與 $L_2: 2x+y=5$ 的交點坐標。

$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

$2x+4y=8$

$-)\ 2x+y=5$

$3y=3,\ y=1$

$x+2\times1=4,\ x=4-2$
$=2$

$(x,y)=(2,1)$

EXAMPLE 3

有數箱蘋果依重量分兩種，大的 6 粒裝一盒，小的 10 粒裝一盒，若共有蘋果 90 粒，裝了 11 盒，問兩種各裝了幾盒？

大的裝 x 盒

小的裝 y 盒

$\begin{cases} x+y=11 \\ 6x+10y=90 \end{cases}$

$-)\ 6x+6y=66$

$4y=24,\ y=\frac{24}{4}=6$

$x+6=11,\ x=11-6=5$

大的 5 盒

小的 6 盒

2-4 圓方程式

1. 圓方程式

　圓心(h,k)，半徑為r的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 。

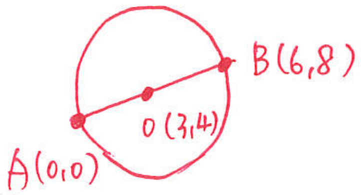
EXAMPLE 1

求下列各圓的圓方程式：

(1)圓心$(1,2)$，半徑為 3 的圓　(2)圓心$(0,-1)$，半徑為 2 的圓　(3)以$A(0,0)$和$B(6,8)$為直徑的圓

$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$

$(x-0)^2+(y+1)^2=2^2$



圓心 O 是 A、B 中點 (3,4)

半徑 $r=\overline{AO}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

EXAMPLE 2

求圓方程式為$(x+1)^2+(y-2)^2=9$的圓面積。

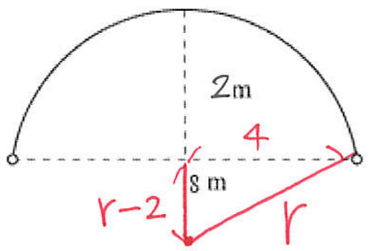
圓半徑 $=\sqrt{9}=3$

圓面積 $=3\times3\times3.14=28.26$

(半徑×半徑×3.14)

EXAMPLE 3

工匠在窗子外做一個圓弧形的花台，此花台在窗口中央往外伸出 2公尺，窗口的寬度為 8 公尺，求此圓弧之圓半徑。



圓心

$r^2=4^2+(r-2)^2$

$r^2=16+r^2-4r+4$，$4r=20$，$r=5$

2-5 圓與直線

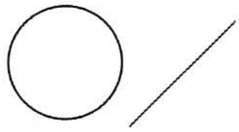
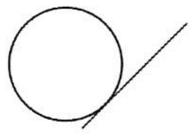
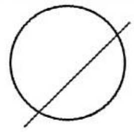
1. 點到直線的距離：

圓心 (h,k)

設圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 、直線 $L:ax+by+c=0$ ，則

圓心到直線的距離 $d=$ $\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

2. 圓與直線的關係

關係	相離	相切	相割
圖形			
判別法	$d>r$	$d=r$	$d<r$

EXAMPLE 1

求點 $(1,2)$ 到直線 $3x+4y+5=0$ 的距離。

$$\frac{|3\times1+4\times2+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

EXAMPLE 2

試問直線 $L:x+y=1$ 與圓 $x^2+y^2=1$ 之相交情形。

圓心 $(0,0)$, 半徑 $=1$

圓心到直線距離 $d=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$

相割.