3-1 指數

主題 1 指數的定義

1 $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n\text{個}}$, $\boxed{a \in R}$, $\boxed{n \in N}$

(1) a 稱底數　(2) n 稱指數　(3) a^n 稱做指數式

2 (1) a^2 稱為 a 的平方(或 a 的二次方)

(2) a^3 稱為 a 的立方(或 a 的三次方)

(3) a^4 稱為 a 的四次方，其餘以此類推

3 指數律(指數式的運算法則)：$a,b \in R$, $m,n \in N$

(1) $a^m \times a^n =$

(2) $\left(a^m\right)^n =$

(3) $(ab)^n =$

(4) $\dfrac{a^m}{a^n} =$

4 指數的擴張(正整數→整數→有理數(分數)→實數)，擴張所定義出的指數式仍需滿足$\boxed{}$

5 零指數：若實數 $a \neq 0$，則 $a^0 =$______

6 負指數：$a \neq 0$，$n \in N$，規定 $a^{-n} =$________$= \dfrac{1}{a \times a \times a \times \cdots \times a}$

7 分數(有理數)指數：$a>0$

(1) $a^{\frac{1}{n}}=$__________ (2) $a^{\frac{m}{n}}=$________

推論：① $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$

② $\sqrt[m\times n]{a^n}=$

《說例》(1) $5^0=$ (2) $3^{\frac{5}{2}}=$

(3) $3^{-4}=$ (4) $3^{-1\frac{1}{4}}=$

(5) $\sqrt[3]{64}=$ (6) $\sqrt{\sqrt[3]{2^{15}}}=$

8 實數指數：設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若一遞增的有理數列 $\langle r_n\rangle$ 的極限為 x，即

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x\text{，則 } a^x=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

《說明》$3^{\sqrt{2}}$ 為數列 $3^{1.4}$，$3^{1.41}$，$3^{1.414}$，$3^{1.4142}$，…的極限

(1)若 $n\in R$，$a>0$，則 a^n_____恆成立

(2)實數指數也滿足指數律

《**說例**》求下列各指數式的值

(1) $2^{(4^5)}=$

(2) $\left(1-\sqrt{3}\right)^5\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^5=$

(3) $\left(2^2\cdot 2^{-1}\right)^2+\left(3^2+5^3\right)^0=$

(4) $\left[a^2(a^3)^{-2}\right]^{-5}=$

(5) $25^{-\frac{3}{2}}=$

(6) $5^{2.3}\times 5^{-0.8}\div 5^{2.5}=$

(7) $\sqrt[5]{7^{20}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7^{12}}}=$

(8) $\dfrac{x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{x}}=$

(9)化簡$\left(\dfrac{2a^2b}{a^3b^4}\right)^2\left(\dfrac{ab^2}{3a^2b}\right)^{-3}=$

【1】比大小

例1：令 $a=2.6^{10}-2.6^{9}$， $b=2.6^{11}-2.6^{10}$， $c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}$。請選出正確的大小關係。(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$　(102年學測)

解答　(4)

$\because$ ① $a=2.6^{10}-2.6^{9}=$

② $b=2.6^{11}-2.6^{10}=$

③ $c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}=$

$\therefore$ $b>c>a$，選(4)

【2】整數指數

例 2：化簡 $\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4}\cdot 64\right]^{-4}\cdot(32)^{-2}=?$ (基隆女中)

解答　$\dfrac{1}{4}$

$\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4}\cdot 64\right]^{-4}\cdot(32)^{-2}$

$=$

指數式求值

指數式求值時，儘可能化成＿＿＿＿＿＿

【3】有理數指數化簡

例 3：$\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-0.25}\times\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}=?$　(高雄女中)

解答　48

$\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-0.25}\times\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}$

$=$

指數式求值

小數化成＿＿＿＿＿＿

再求值

例4：對任意實數 x 而言，$27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值為何?

(1) 3　(2) $3\sqrt{3}$　(3) 9　(4) 27　(5) $81\sqrt{3}$　(97學測)

解答　(3)

$\because x^2+\dfrac{2}{3}\geq$

$\therefore 27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值=

【4】根式化簡

例 5：將下列根式化為指數式

(1) $\sqrt[3]{5^4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{5}=?$　　(2)若 $\dfrac{\sqrt{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}}=a^k$，則 $k=?$ (景美女中)

解答　(1)25　　(2) $\dfrac{43}{72}$

根式與有理數指數

根式與有理數指數可互化

，方便求值

(1)原式$=5^{\frac{4}{3}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=5^2=25$

(2) $\dfrac{\sqrt{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}}$

$=$

例 6：設 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，求 x,y 之值

解答　$x=5,y=3$

(1) $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$　$\Leftrightarrow$

(2) $3^{15y+3x}=81^{xy}$　$\Leftrightarrow$

【5】求值問題

例 7：(1)若 $(11.2)^{a}=10^{3}$，$(0.0112)^{b}=10^{3}$，則 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=?$ (景美女中)

(2)若 $423^{x}=27$，$47^{y}=27$，求 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=?$

(3)設 $abc\neq 0$，若 $2^{a}=3^{b}=6^{c}$，則 $\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}=?$

解答 (1) 1　(2) $\dfrac{2}{3}$　(3) 1

(1) $\begin{cases}(11.2)^{a}=10^{3}\\(0.0112)^{b}=10^{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}11.2=10^{\frac{3}{a}} \cdots \boxed{①}\\0.0112=10^{\frac{3}{b}} \cdots \boxed{②}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}423^{x}=27\\47^{y}=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}423=27^{\frac{1}{x}} \cdots \boxed{①}\\47=27^{\frac{1}{y}} \cdots \boxed{②}\end{cases}$

(3) $2^{a}=3^{b}=6^{c}$ 化為 $\begin{cases}2^{a}=6^{c}\\3^{b}=6^{c}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2=6^{\frac{c}{a}} \cdots \boxed{①}\\3=6^{\frac{c}{b}} \cdots \boxed{②}\end{cases}$

指數式求值

儘可能化成________

主題 2 求值問題

1 乘法公式及其變形

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \Rightarrow A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$

平方和=和的平方－2×積

(2) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=A^3+3AB(A+B)+B^3$

$\Rightarrow A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$，即立方和=和的立方－3×和×積

註：$A^3+B^3=$______________________________

(3) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2 \Rightarrow A^2+B^2=(A-B)^2+2AB$

(4) $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

$\Rightarrow A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$

註：$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

2 觀念：(1) $(a^x)^2=$____________________，即 a^x 的平方=

(2) $(a^x)^3=$____________________，即 a^x 的立方=

《說例 1》 $t=2^x \Rightarrow$ ① $t^2=$

② $t^3=$

③ $2^{-x}=$

④ $2^{x+3}=$

⑤ $2^{2x-1}=$

《說例 2》$t=a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ ① $a^{\frac{1}{2}}=$

② $t^2=$

③ $t^3=$

《說例 3》$t=a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ ① $a^{-\frac{1}{2}}=$

② $t^2=$

③ $a^1+a^{-1}=$

$\boxed{3}$ (1) $a^{2x}+a^{-2x}=\left(a^x\right)^2+\left(a^{-x}\right)^2=$

(2) $\left(x+x^{-1}\right)^2=$

(3) $a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^x\right)^3+\left(a^{-x}\right)^3=$

(4) $\left(x+x^{-1}\right)^3=x^3+x^{-3}+3\left(x+x^{-1}\right)$

$\boxed{4}$ 置換法

(1)令 $t=a^x$，則① $\boxed{t}$ ② $a^{2x}=\boxed{}$

$t=a^x$	2^x	3^x	5^x
$t^2=a^{2x}$			

(2)令 $t=a^{x}+a^{-x}$，則① $\boxed{t\quad\quad}$

② $a^{2x}+a^{-2x}=(a^{x})^{2}+(a^{-x})^{2}=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

$t=a^{x}+a^{-x}$		$3^{x}+3^{-x}$	$10^{x}+10^{-x}$
$t^{2}-2=a^{2x}+a^{-2x}$			

證：a^{x}，$a^{-x}>0$，$\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}\geq\sqrt{a^{x}\cdot a^{-x}}=\sqrt{a^{0}}=1$，故 $a^{2x}+a^{-2x}\geq 2$

例 8：已知 $4^{x}=5$，求 $8^{-x}=$? (屏東高中)

解答 $\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

$\because 4^{x}=\left(2^{2}\right)^{x}=\left(2^{x}\right)^{2}=5$ $\therefore 2^{x}=$

故 $8^{-x}=$

例 9：若 $4^{2x}=1.96$，則 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^{x}+2^{-x}}=?$

解答 $\dfrac{39}{35}$

法 1：

$4^{2x}=1.96 \Leftrightarrow \left(2^{2}\right)^{2x}=1.4^{2}$ 得 $2^{2x}=1.4$ 或 -1.4 (負不合)

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^{x}+2^{-x}}=\frac{\left(2^{x}+2^{-x}\right)\left[\left(2^{x}\right)^{2}-2^{x}\cdot 2^{-x}+\left(2^{-x}\right)^{2}\right]}{2^{x}+2^{-x}}$$

$$=\left(2^{x}\right)^{2}-2^{x}\cdot 2^{-x}+\left(2^{-x}\right)^{2}=2^{2x}-1+2^{-2x}=1.4-1+\frac{1}{1.4}=\frac{39}{35}$$

法 2：

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^{x}+2^{-x}}=$$

例 10：設 $a>0$，若 $a^{3x}+a^{-3x}=52$，求(1) $a^{x}+a^{-x}=?$　(2) $a^{2x}+a^{-2x}=?$　(3) $a^{x}=?$

解答　(1)4　(2)14　(3) $2\pm\sqrt{3}$

(1)設 $a^{x}+a^{-x}=t$ ________

$\because a^{3x}+a^{-3x}=$ ____

$\therefore\ t^{3}-3t=52 \Leftrightarrow t^{3}-3t-52=0 \Leftrightarrow (\qquad)(t^{2}+4t+13)=0$

得 $t-4=0$ 或 $t^{2}+4t+13=0$，故 $t=4$ 或 $-2\pm3i$ (不合)

(2)

另一種命題方式

已知 $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=52$，求(1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=?$　(2) $a+a^{-1}=?$　(3) $a^{\frac{1}{2}}=?$

解答　(1)4　(2)14　(3) $2\pm\sqrt{3}$

例 11：$a^{2x}=\sqrt{2}+1$，求$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}$之值

解答 $3+\sqrt{2}$

原式$=\dfrac{a^{x}\left(a^{3x}+a^{-3x}\right)}{a^{x}\left(a^{x}-a^{-x}\right)}=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{\left(a^{2x}\right)^{2}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1-1}$

$$=\frac{(3+2\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$$

另解：

令 $k=a^{x}>0$，則 $k^{2}=a^{2x}=\sqrt{2}+1$

得 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=$

3 - 2 指數函數

主題1 指數函數圖形研究

1 指數函數定義：$f(x)=a^x$，稱為以 a 為底之指數函數

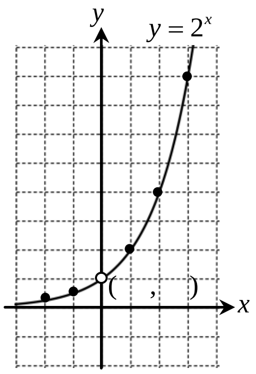
(1)底數的限制：$\boxed{a>0 \text{ 且 } a\neq 1}$

(2)定義域：$x\in R$，值域 $y\in R^+$

(3)性質：$f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=$ $\boxed{\quad\quad}$

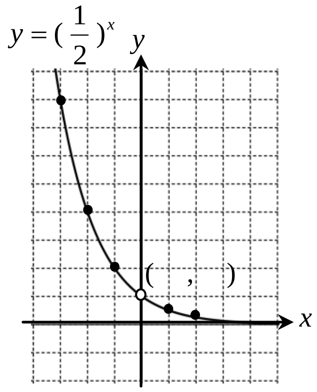
2 指數函數 $f(x)=a^x$ 的圖形

(1) $a>1$ 時，$f(x)$ 為嚴格遞增函數



x							
$y=2^x$							

(2) $0<a<1$ 時，$f(x)$ 為嚴格遞減函數



x							
$y=(\frac{1}{2})^x$							

圖形特徵：

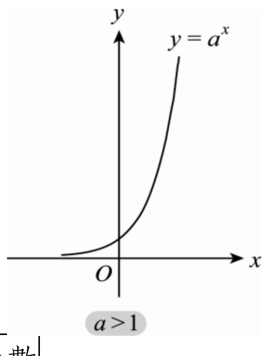
(1) y 恆 $\boxed{\quad}$，圖形必通過 $\boxed{\quad\text{點}}$

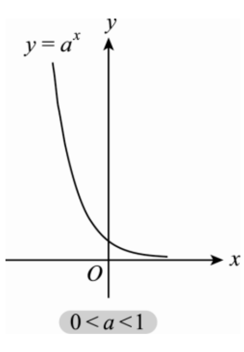
(2)以 $\boxed{\quad\text{軸}}$ 為漸近線

(3)指數函數 $f(x)=a^x$

①$a>1$時，$f(x)$為 $\boxed{\quad\text{函數}}$

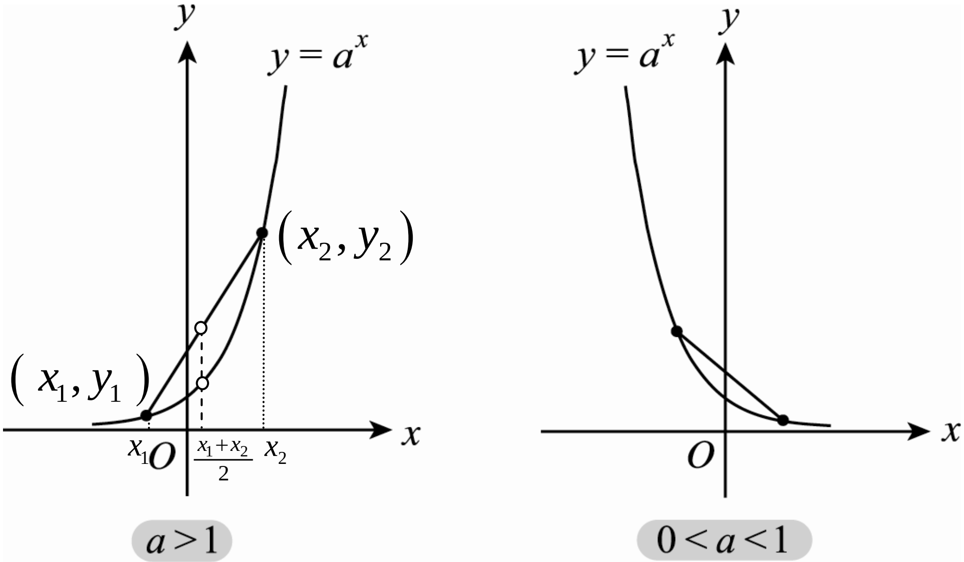
②$0<a<1$時，$f(x)$為 $\boxed{\quad\text{函數}}$





(4)兩函數 $y=2^x$ 與 $\boxed{\quad\quad}$ 對稱於 y 軸

3 圖形凹口向上：圖形上任取相異二點的連線線段(稱為割弦)恆在圖形的上方



(1)由算幾不等式得 $\dfrac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}>\sqrt{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ $(\because x_1\neq x_2)$

(2)圖形凹口向上的判別：________________

4 實數指數的大小：設 $a>0$，α,β 為任意實數，且 $\alpha>\beta$

(1)當 $a>1$ 時，a^{α} ____ a^{β}　　(2)當 $0<a<1$ 時，a^{α} ____ a^{β}

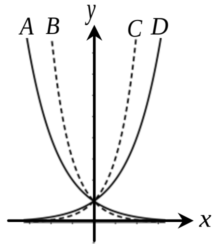
《**說例**》比較下列指數式的大小

① $(1.1)^3$ ________ $(1.1)^2$ ________ 1.1

② $(0.9)^3$ ________ $(0.9)^2$ ________ 0.9

5 不同底數的指數函數比較

《**說例**》試描繪下列函數的圖形(以右圖 A,B,C,D 作答)



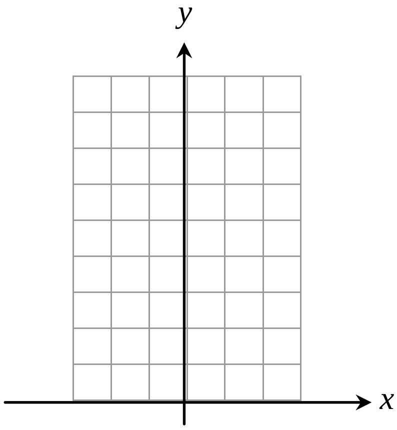
(1) $f(x)=2^x$, $x\in R$ (2) $f(x)=3^x$, $x\in R$

(3) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x\in R$ (4) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x\in R$

解答 (1)D (2)C (3)A (4)B

描點法 → 求點坐標繪入坐標系

x	2	1	0	-1	-2
$y=2^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=3^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

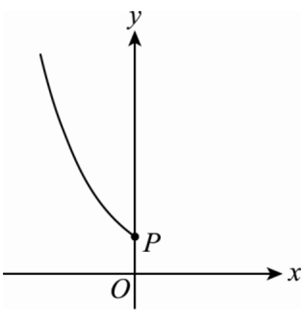


①比較 $y=2^x$ 與 $y=2^{-x}$ → 兩圖形對稱於__________

②比較 $y=2^x$ 與 $y=3^x$ → ________________________

故(1)D (2)C (3)A (4)B

例 1：右圖為函數 $y=a^x$ 的部分圖形，選出正確的選項:



(1) $\overline{OP}=1$ (2) $0<a<1$

(3) $y=a^x$ 的圖形與每一條水平線均相交

(4)若 $(100,k)$ 為 $y=a^x$ 函數上一點，則 $k>0$

(龍騰版)

解答 (1)(2)(4)

$\boxed{\text{例 2}}$：試回答以下問題，指數函數圖形以 A,B,C,D,E,F 作答

(1) $y=2^x$：__ (2) $y=3^x$：______

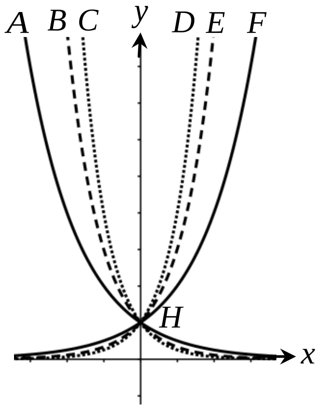
(3) $y=4^x$：____ (4) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$：____

(5) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$：____ (6) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$：_____

(7) H 點坐標：________

(8) A,B,C 為指數函數之圖形，此時底數___________

(9) D,E,F 為指數函數之圖形，此時底數___________



$\boxed{\text{解答}}$ (1)F (2)E (3)D (4)A (5)B (6)C (7)(0,1) (8)$0<a<1$ (9)$a>1$

●指數式與根式比大小

(1)函數值比大小常利用函數的$\boxed{\quad\quad\text{性}}$與$\boxed{\text{凹性}}$比大小

(2)指數函數值比大小的技巧

①化為____________，再比大小

②化為____________，再比大小

③根式比大小，先化為$\boxed{\quad\text{方根}}$，再比大小

④當解不出時，一律取對數，再查表比大小

例 3：下列五個數中，何者最小?

(A) $2^{\frac{1}{3}}$ (B) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ (C) $2^{\frac{1}{4}}$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (E) $8^{-\frac{1}{3}}$ (88 學測)

解答 (E)

例 4：比較下列各數大小：$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$

解答 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

例 5：比較下列 s 與 t 的大小

(1) $s = 10^{0.5}$， $t = \frac{10^{0.4} + 10^{0.6}}{2}$

(2) $s = \frac{10^{\sqrt{2}} + 10^{\sqrt{3}}}{2}$， $t = 10^{\frac{3}{2}}$ (全華版)

解答 (1) $t > s$ (2) $s > t$

主題 2 兩圖形的對稱性與圖形本身的對稱性

1 兩圖形的對稱

$y=f(x)$ 的圖形與圖形 Γ 對稱於 x 軸、y 軸、原點時，圖形 Γ 的函數如下：

與 $y=f(x)$ 對稱於	x 軸	y 軸	原點
圖形 Γ 的函數	$-y=f(x)$	$y=f(-x)$	$-y=f(-x)$

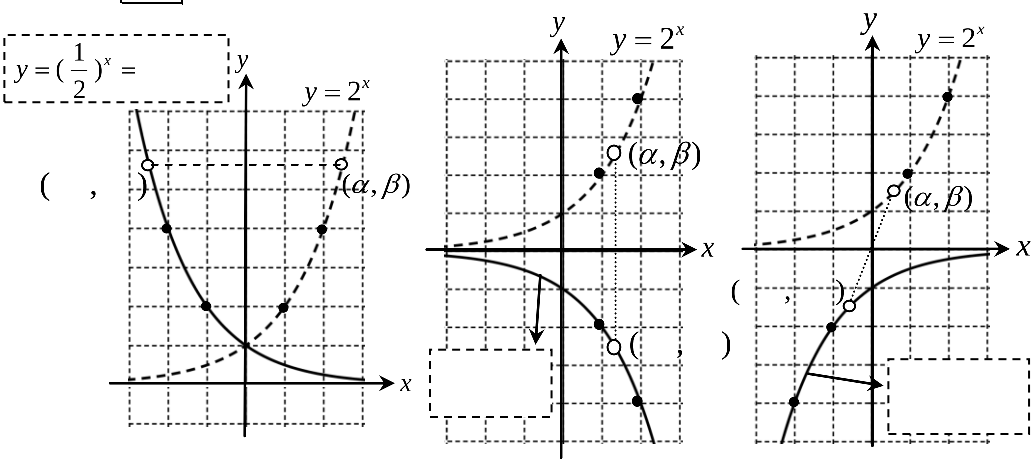
(1) $y=a^x$ 與 $y=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 對稱於 $\boxed{\quad\text{軸}}$

(2) $y=a^x$ 與 $y=-a^x$ 對稱於 $\boxed{\quad\text{軸}}$

(3) $y=a^x$ 與 $y=-a^{-x}$ 對稱於原點

《說例 1》 比較 $y=2^x$ 與 $y=2^{-x}$，$y=-2^x$，$y=-2^{-x}$ 之間圖形的對稱關係

解答



(1) $y=2^x$ 與 $y=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 對稱於____________

(2) $y=2^x$ 與 $y=-2^x$ 對稱於____________

(3) $y=2^x$ 與 $y=-2^{-x}$ 對稱於____________

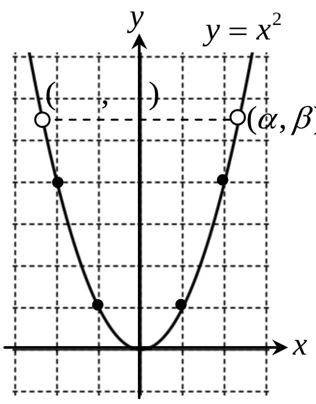
2 對稱圖形(圖形本身呈對稱)

$\Gamma: y=f\left(x\right)$ 的圖形本身對稱於 y 軸、原點的判別

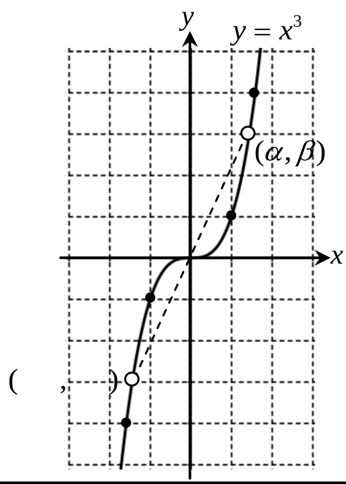
對稱於	y 軸	原點
判別法	________代入 Γ 皆滿足	$(-x,-y)$ 代入 Γ 皆滿足

《說例 2》試問以下圖形的對稱性

(1) $y=x^2$ 的圖形對稱於 $\boxed{\quad 軸}$



(2) $y=x^3$ 的圖形對稱於 $\boxed{原點}$



例 6：下列那些組的兩個函數，其圖形互相對稱於 y 軸

(1) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$ 與 $y=2^{3x}$　(2) $y=2^{3x}$ 與 $y=3^{2x}$　(3) $y=x^2$ 與 $y=-x^2$

(84 學測)

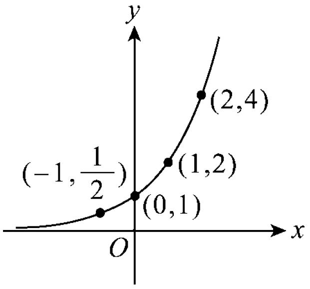
解答　(1)

例 7：試作以下函數圖形

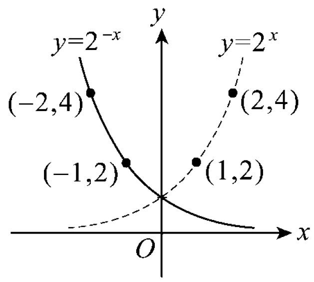
(1) $y=2^{x}$　　(2) $y=2^{-x}$　　(3) $y=-2^{x}$　　(4) $y=-2^{-x}$

解答

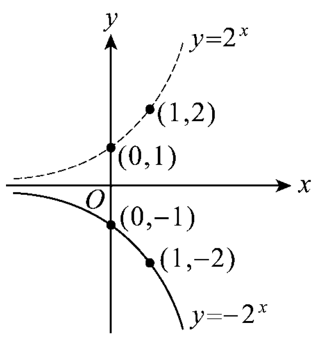
(1) $y=2^{x}$



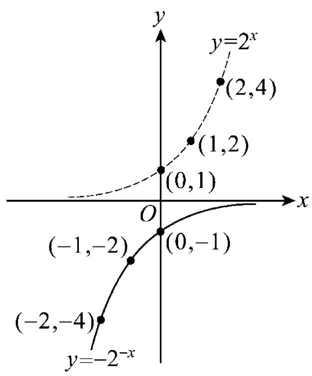
(2) $y=2^{-x}$



(3) $y=-2^{x}$



(4) $y=-2^{-x}$



主題 3 絕對值函數作圖

$\boxed{1}$ 遇絕對值函數作圖時：誰含絕對值，就對誰討論正、負

$\boxed{2}$ 任何作圖問題皆可用______作略圖

$\boxed{3}$ (1) $y=a^{|x|}$ 對稱於______　(2) $|y|=a^{x}$ 對稱於______

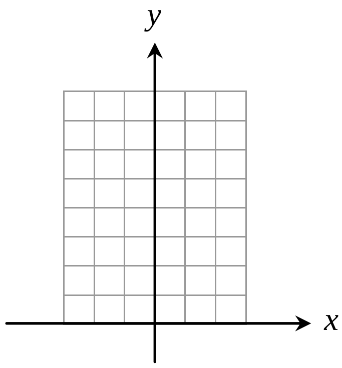
(3) $|y|=a^{-|x|}$ 對稱於______　(4) $y=a^{-|x|}$ 對稱於______

《**說例**》作函數 $\Gamma: y=2^{|x|}$ 的圖形

$\boxed{\text{解答}}$

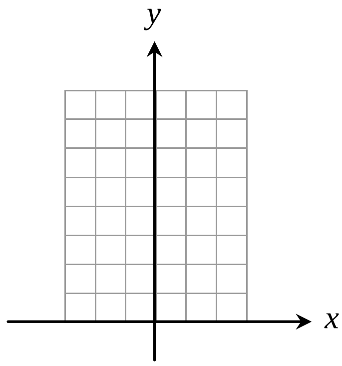
$\boxed{\text{法 1}}$：描點法

x							
y							



$\boxed{\text{法 2}}$：絕對值函數化為條件函數作圖

$$y=2^{|x|}=\begin{cases} \\ \end{cases}$$



$\boxed{\text{法 3}}$：對稱性作圖法

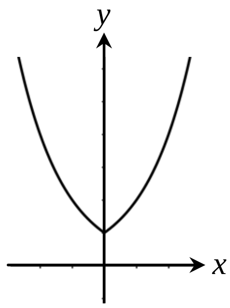
(1) $\because (-x,y)$ 代入 Γ 得 $2^{|-x|}=2^{|x|}$

$\therefore$ 圖形對稱 y 軸

(2)先作 $x\geq 0$ 的部分圖形

原式化為 $y=2^{x}, x\geq 0$

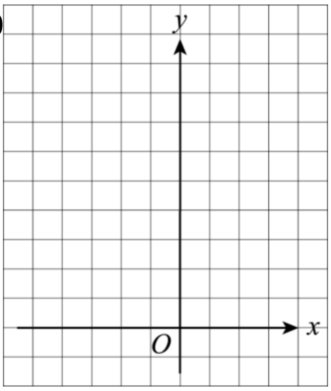
再以對稱性作全圖



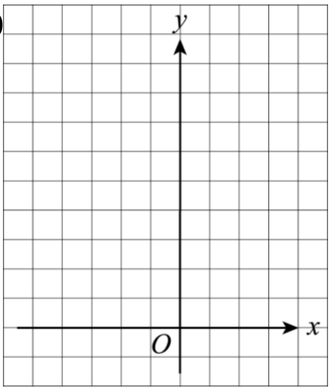
$\boxed{\text{例 8}}$：試作以下函數圖形：(1)$y=2^{|x|}$ (2)$y=2^{-|x|}$ (3)$y=-2^{|x|}$

$\boxed{\text{解答}}$

(1)



(2)



(3)

主題 4 圖形的平移與伸縮

1 圖形平移：$y=f(x)\xrightarrow[\text{垂直平移}k\text{單位}]{\text{水平平移}h\text{單位}}$ 平移後:________________

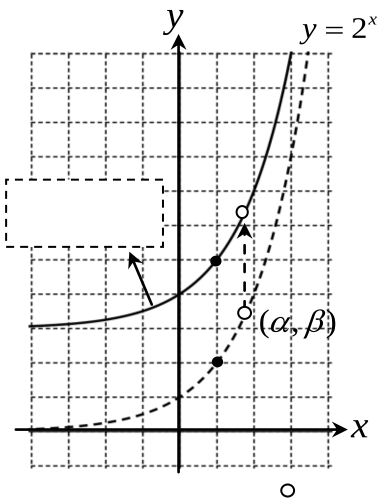
2 圖形伸縮：$y=f(x)\xrightarrow[\text{垂直伸縮}b\text{倍}]{\text{水平伸縮a倍}}$ 伸縮後:________________

《**說例 1**》試繪以下函數圖形並與 $y=2^x$ 比較之

(1) $y=2^x$ 向_____平移______單位得 $y=2^x+3$ 的圖形

x	0	1	2	3	α
$y=2^x$	1	2	4	8	β
$y=2^x+3$	4	5	7	11	

⇒

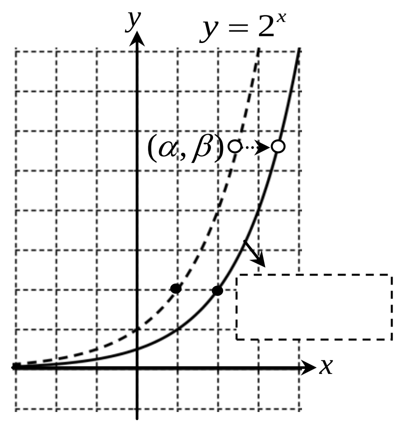


(2) $y=2^x$ 向_____平移______單位，得 $y=2^{x-1}$

x	0	1	2	3	α
$y=2^x$	1	2	4	8	β

x	1	2	3	4	
$y=2^{x-1}$	1	2	4	8	β

⇒



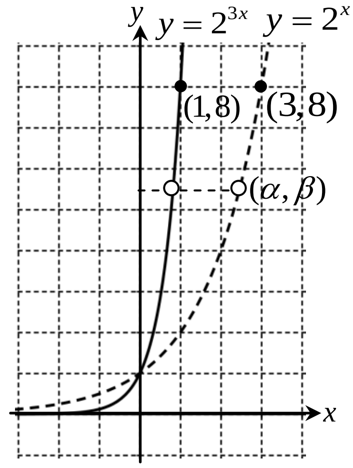
《說例 2》試繪以下函數圖形並與 $y=2^x$ 比較之

(1) $y=2^x$ 向_______伸縮__________，得 $y=2^{3x}$

x	0	1	2	3	α
$y=2^x$	1	2	4	8	β

x	0				
$y=2^{3x}$	1	2	4	8	β

$\Rightarrow$

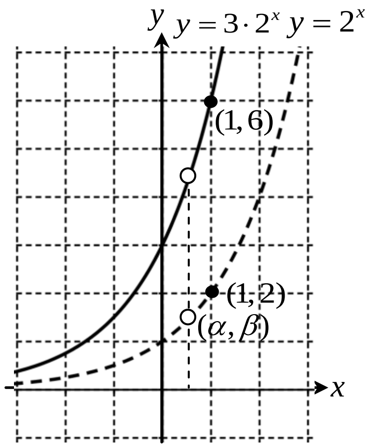


(2) $y=2^x$ 向_______伸縮__________，即 $y=3\cdot 2^x$

x	0	1	2	3	α
$y=2^x$	1	2	4	8	β

x	0	1	2	3	α
$y=3\cdot 2^x$	3	6	12	24	

$\Rightarrow$



例 9：將 $y=5^x$ 之圖形沿 x 軸右移 2 個單位，再向下平移 4 個單位，所得的圖形方程式為何?

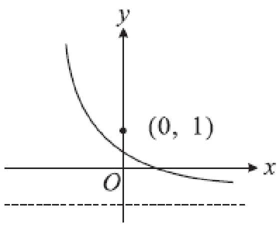
解答 $y=5^{x-2}-4$

$y=5^x \xrightarrow[\text{右移 2 個單位}]{}$ 得 $\boxed{\phantom{y=5^{x-2}}}$ $\xrightarrow[\text{下移 4 個單位}]{}$ 得 $\boxed{\phantom{y=5^{x-2}-4}}$

例 10：函數 $y=2^{ax}+b$ 的部分圖形如右，則點 $(a,\ b)$ 在第幾象限內?

(1)第一象限 (2)第二象限 (3)第三象限

(4)第四象限 (5)無法確定

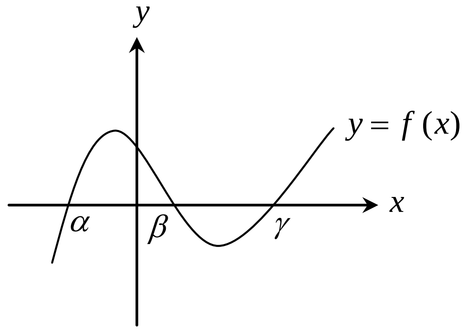


解答 (3)

主題 5 方程式實根的個數

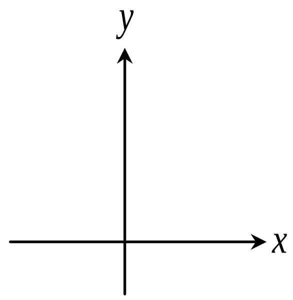
1 方程式 $f(x)=0$ 的實根即 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ 交點的____________

《說例 1》 如圖，方程式 $f(x)=0$ 有_____個實根__________



《說例 2》 方程式 $2^x=0$ 是否有實數解？請說明您的理由

解答 否



2 方程式 $f(x)=g(x)$ 的實根即 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 交點的 x 坐標

【1】求交點坐標

例 11：函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 的圖形之交點坐標為何?

解答 $\left(-2,\dfrac{1}{16}\right)$

解 $\begin{cases} y=4^x\cdots(1) \\ y=2^{3x+2}\cdots(2) \end{cases}$

【2】判別有無實根

例 12：觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真?

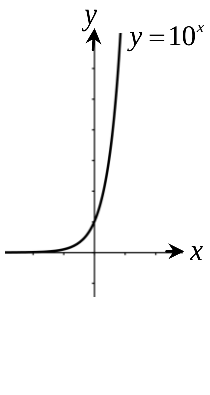
(1) $10^x=x$ 有實數解　(2) $10^x=-x$ 有實數解

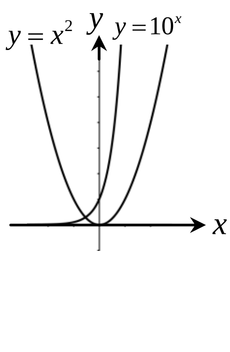
(3) $10^x=x^2$ 有實數解　(4) x 為實數時，$10^x>x$ 成立

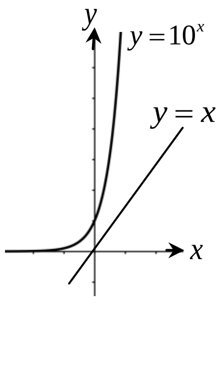
(5) $x>0$ 時，$10^x>x^2$ 成立　(91 學測)

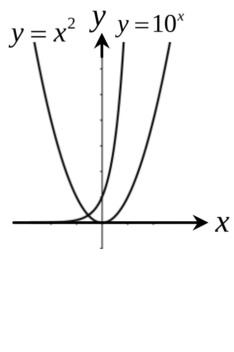
解答 (2)(3)(4)(5)

(1)×　(2)○　(3)○　(4)○　(5)○









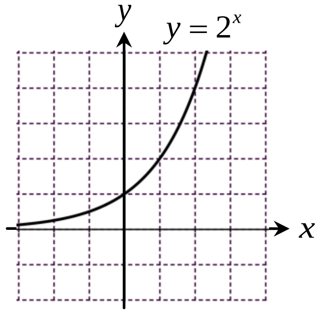
【3】求實根數

$\boxed{\text{例 13}}$：求下列各題的實根數(1) $2^x=x$　　(2) $2^x+x=0$　　(3) $x^2=2^{-|x|}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)0　(2)1　(3)2

(1)$\because \begin{cases} y=2^x \\ y=x \end{cases}$ $\boxed{\qquad\text{交點}}$

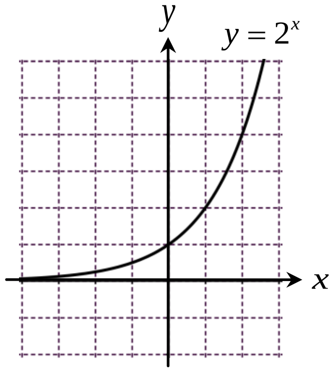
$\therefore y=2^x$ 沒有實根



(2) $2^x+x=0$　$\Leftrightarrow$　________________

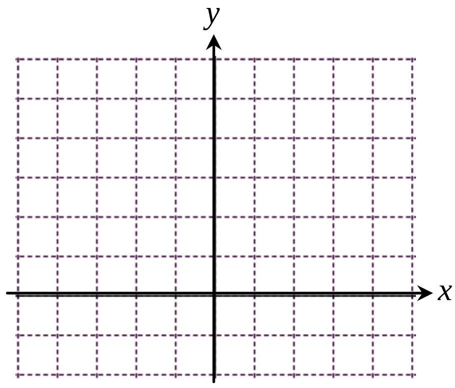
$\because \begin{cases} y=2^x \\ y=-x \end{cases}$ 有 $\boxed{\qquad\text{個交點}}$

$\therefore 2^x+x=0$ 有________實根



(3)$\because \begin{cases} y=x^2 \\ y=2^{-|x|} \end{cases}$ 有 $\boxed{\qquad\text{個交點}}$

$\therefore x^2=2^{-|x|}$ 有________個實根

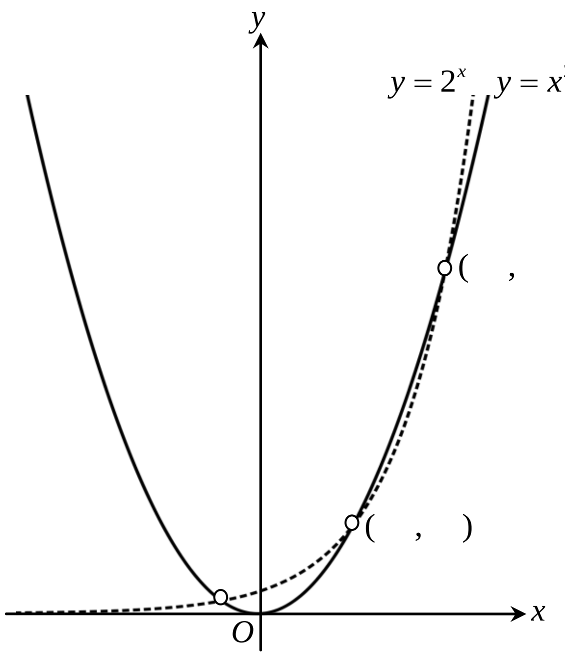


例 14：求方程式 $x^2=2^x$ 的實根數，並寫出有幾個正實根、幾個負實根

解答　3

$\because \begin{cases} y=2^x \\ y=x^2 \end{cases}$ 有 $\boxed{\quad\quad}$ 個交點

x	0	1	2	3	4	5
$y=2^x$						
$y=x^2$						



$\therefore 2^x=x^2$ 有______個實根，其中有______個正實根、_______個負實根

主題 6 指數方程式

1 解題技巧

(1)儘可能化成底數相同：若 $a \neq 0, 1, -1$ 且 $a^x = a^y$，則 ______

(2)置換法

①令 $t = a^x$，______，則 $t^2 = a^{2x}$ (即 a^x 的平方=______)

$t = a^x$			
$t^2 = a^{2x}$			

②令 $t = a^x + a^{-x}$，______，則 $t^2 - 2 =$______

$t = a^x + a^{-x}$			
$t^2 - 2 = a^{2x} + a^{-2x}$			

2 公式整理：①a^x 的平方=______ ②a^x 的立方=______

(1) $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$

(2) $A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B) = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

(3) $a^{2x} + a^{-2x} =$______

(4) $a^{3x} + a^{-3x} =$______

=______

【1】可化為同底數的指數方程式

例 15：解下列各方程式

(1) $3^{5x+6}=\dfrac{1}{81}$

(2)設 $\left(\sqrt{3}\right)^{3x+2}=\dfrac{27\sqrt{3}}{3^{x}}$，試求 $x=?$

(3) $\sqrt{(0.04)^{5-x}}=5^{2x-1}$

解答 (1)－2　(2)1　(3)－4

(1) $3^{5x+6}=\dfrac{1}{81}$

(2) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x+2}=\dfrac{27\sqrt{3}}{3^{x}}$

(3) $\sqrt{(0.04)^{5-x}}=5^{2x-1}$

【2】置換法解指數方程式

$\boxed{\text{例 16}}$：(1)解方程式 $4^{x+1}-33\cdot 2^{x-1}+2=0$

(2)解方程式 $3^{x}+3^{-x}=2$

$\boxed{\text{解答}}$ (1)－3 或 2　(2)0

(1)令 $t=2^{x}$，t________

則 $4^{x+1}-33\cdot 2^{x-1}+2=0$

$\Rightarrow \left(2^{2}\right)^{x+1}-33\cdot 2^{x-1}+2=0$

(2)令 $t=3^{x}$, $t>0$

則 $3^{x}+3^{-x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x}+\dfrac{1}{3^{x}}=2$

$\boxed{\text{例 17}}$：解 $2\left(4^{x}+4^{-x}\right)-7\cdot\left(2^{x}+2^{-x}\right)+10=0$

$\boxed{\text{解答}}$　0

令 $t=2^{x}+2^{-x}$，$\boxed{t\ \geq\qquad\quad}$

則 $2\left(4^{x}+4^{-x}\right)-7\cdot\left(2^{x}+2^{-x}\right)+10=0$

換法

令 $t=2^{x}+2^{-x}$

則 $t^{2}-2=$____________

【3】因式分解求指數方程式

$\boxed{\text{例 18}}$：解 $6^{x}-4\cdot3^{x}-3\cdot2^{x}+12=0$　(建國中學)

$\boxed{\text{解答}}$　1 或 2

$6^{x}-4\cdot3^{x}-3\cdot2^{x}+12=0$

主題 7 指數不等式

1 指數函數的遞增、遞減性

(1) $a>1$：若 $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ ，則________________

(2) $0<a<1$：若 $a^{f(x)}<a^{g(x)}$，則________________

2 解題時儘可能化成____________

【1】可化同底數(底數大於1)，解指數不等式

例 19：解下列不等式：(1) $6^{x^2+x-6}<1$　　(2) $2^{x^2-4x-13}<4^{x-3}$

解答　(1) $-3<x<2$　(2) $-1<x<7$

【2】可化同底數(0<底數<1)，解指數不等式

例 20：解下列不等式：

(1) $(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$　(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2}<\left(\frac{1}{8}\right)^{2x^2-1}$　(3) $\frac{1}{81}\le\left(\frac{1}{9}\right)^{4x}\le 3$

解答　(1) $x>2$ 或 $x<-\frac{1}{3}$　(2) $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$　(3) $-\frac{1}{8}\le x\le\frac{1}{2}$

【3】置換法解指數不等式

例 21：解 $27^x-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}<0$，得 $b<x<a$，求 $a^2-b^2=?$　(台中一中)

解答　-1

$27^x-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}<0\Leftrightarrow\ (3^3)^x-4\cdot(3^x)^2\cdot 3^{-1}+3^x\cdot 3^{-1}<0$

即 $\left(3^x\right)^3-4\left(3^x\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(3^x\right)\cdot\frac{1}{3}<0$

主題 8 指數函數的極值

設 $a>0, a\neq 1$

(1) 令 $t=a^x$，則 $t>0$

(2) 令 $t=a^x+a^{-x}$，則①$t\geq 2$　②$a^{2x}+a^{-2x}=t^2-2$

例 22：設 $-1\leq x\leq 0$，試求函數 $y=3\cdot 4^x-2^{x+2}$ 的最大值與最小值

解答　最大值 -1，最小值 $-\frac{4}{3}$

$y=3\cdot 4^x-4\cdot 2^x=3\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x$

令 $t=2^x$，則 $\boxed{}$ ($\because$ ______________)

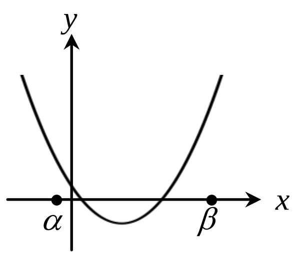
原式化為 $y=3t^2-4t=3\left(t-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$，$\frac{1}{2}\leq t\leq 1$

①當 $t=\frac{2}{3}$ 時，y 有最小值 $-\frac{4}{3}$

②當 $t=1$ 時，y 有最大值－1

定義域有範圍限制的二次函數極值

$f(x)=ax^2+bx+c$，$\alpha\leq x\leq\beta$，如右圖所示，則 $f(x)$ 的最大、小值產生在 ________________________處



3-3 對數

主題1 對數的定義與對數律

1 對數 $\log_a b \rightarrow$ 用以表示____________(次數)

(1)對數：①$2^2=4 \Leftrightarrow 2=$

②$2^x=6 \Leftrightarrow x=$

③$2^3=8 \Leftrightarrow 3=$

(2)對數的定義：已知$a>0$且$a\neq 1$，$x\in R$，$b\in R^+$

$$\boxed{a^x=b \Leftrightarrow x=}$$

《指、對數轉換口訣》一日為底，終生為底

① $\log_a b$ 中，a稱為底數；b稱為真數

② $\log_a b$ 讀作”以a為底數，b的對數”

(3) $\log_{10} b$記為$\log b$，稱為常用對數(以______為底數的對數)

(4)對數$\log_a b$有意義的條件：①$a>0$ ②$a\neq$______ ③$b>$______

《說例》求下列對數值：(1) $\log_3 81=$________ (2) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}=$________

■四則運算，加上開方運算、指數運算與對數運算，合稱七則運算

2 對數的性質

(1) $\log_a a =$ ________

《說例》 $\log_2 2 = \log_3 3 = \log_4 4 =$

(2) $\log_a 1 =$ ________

《說例》 $\log_2 1 = \log_3 1 = \log_4 1 =$

(3)同底相消： $a^{\log_a b} =$ ________

《說例》① $2^{\log_2 3} =$　　② $3^{\log_3 5} =$

(4)對數和： $\log_a x + \log_a y =$　　(對數之和等於乘積之對數)

《說例》 $\log_2 6 + \log_2 3 =$

(5)對數差： $\log_a x - \log_a y =$　　(對數之差等於商之對數)

《說例》 $\log_2 6 - \log_2 3 =$

(6)換底公式： $\log_a b =$

《說例》 $\log_3 5 =$

(7)連鎖律：① $(\log_a b)\cdot(\log_b c) = \log_a c$

② $(\log_a b)\cdot(\log_b a) = 1$

《說例》① $\log_2 7 \cdot \log_7 4 =$　　② $\log_2 3 \cdot \log_3 2 =$

(8)次方前提：①$\log_a b^n =$

②$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \cdot \log_a b$

③ $\log_{a^n} b^n =$

《說例》①$\log_2 4 =$

②$\log_4 8 =$

③$\log_2 3 =$

(9)蹺蹺板性質：$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

例 1：$\log_{x-3}\left(x^2+2x-63\right)$有意義，求 x 的範圍

解答 $x>7$

$\because \log_{x-3}\left(x^2+2x-63\right)$有意義

$\therefore \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

$\boxed{\text{例 2}}$：下列那些式子是錯誤的?(多選)

(A)$\log_2(-5)=-\log_2 5$　　(B)$\log_2(3\times5)=(\log_2 3)(\log_2 5)$

(C) $\log_2 5^3=(\log_2 5)^3$　　(D)$\log_2(3+5)=\log_2 3+\log_2 5$

(E) $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 5}=\log_2 9-\log_2 5$　　(F)設 $x\in R$，$x\neq0$，則 $\log_2 x^2=2\log_2 x$

(G) $\log 2+\log 5=\log 10$

$\boxed{\text{解答}}$ (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A)× ∵ $\log_a b$ 中 $\boxed{\text{真數}\ b\qquad}$

(B)× ∵左式 $\log_2(3\times5)=$__________________ $\neq$ 右式 $(\log_2 3)(\log_2 5)$

(C)× ∵左式 $\log_2 5^3=$___________ $\neq(\log_2 5)^3$

(D)× ∵左式 $\log_2(3+5)=$___________ $\neq\log_2 3+\log_2 5$

(E)× 左式 $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 5}=$

右式 $\log_2 9-\log_2 5=$

(F)× $\boxed{\text{反例}}$:

$\boxed{\text{觀念}}$ 我們都是一家人

(G)○ 左式 $\log 2+\log 5=$

故選(A)(B)(C)(D)(E)(F)

例 3：設 a,b 均為異於 1 的正數， $x>0$，則下列各式何者錯誤?

(A) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$　　(B) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

(C) $\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}$　　(D) $\log_a b = \log_{a^r} b^r \ (r \in R, r \neq 0)$

(E) $\log_a b = \log_{2a} 2b$　　(F) $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

解答　(E)

(A)○　左式 $\log_a \frac{1}{x} =$

(B)○　左式 $\log_{\frac{1}{a}} x =$

(C)○　右式 $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} =$

(D)○　右式 $\log_{a^r} b^r =$

(E)×　無此性質

(F)○　左式 $\log_a b =$

故選(E)

對數求值

(1)儘可能化 $\boxed{\text{同}\qquad\qquad}$

(2)整數化______________________可看彼此間的關係

例 4：下列各式何者為真?

(A)$\log_{81}3=\frac{1}{4}$　(B)$\log_{\frac{1}{16}}32=-\frac{5}{4}$　(C)$\log_2 5=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}$

(D)$\frac{\log_4 27}{\log_2 3}=\frac{3}{2}$　(E)$\log_9 2=\log_3\sqrt{2}$　(F)$\log_7(-3)^2=2\log_7(-3)$

解答　(A)(B)(C)(D)(E)

(A)○　左式 $\log_{81}3=$

(B)○　左式 $\log_{\frac{1}{16}}32=$

(C)○　右式 $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}=$

(D)○　左式 $\frac{\log_4 27}{\log_2 3}=$

(E)○　右式 $\log_3\sqrt{2}=$

(F)×　左式 $\log_7(-3)^2=$

故選(A)(B)(C)(D)(E)

主題 2 對數定義與性質的綜合練習

1 指、對數互化求值

例 5：設 $a,\ b$ 為正實數，已知 $\log_7 a = 11,\ \log_7 b = 13$；試問 $\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？(1)12 (2)13 (3)14 (4)23 (5)24 (94 學測)

解答 (2)

、對數互化

$a^x = b$

$\Leftrightarrow$ __________

$\because \log_7 a = 11 \Leftrightarrow a =$

$\log_7 b = 13 \Leftrightarrow b =$

$\therefore \log_7(a+b) = \log_7(7^{11} + 7^{13})$

= ______________________________

2 同底數，求對數值

例 6：設 a, b, c 為正整數，若 $a\log_{520} 2 + b\log_{520} 5 + c\log_{520} 13 = 3$，則 $a+b+c=$? (93 學測)

解答 15

$a\log_{520} 2 + b\log_{520} 5 + c\log_{520} 13 = 3$

念

整數化__________

看整數間的結構關係

3 利用性質對數和、對數差，求值

(1)對數化簡時，常將$\boxed{\text{常數或係數}}$皆化為$\boxed{}$，方便以對數和、差性質解題

(2)沒有寫底數者，即是以_______為底數的對數

例 7：$\dfrac{2+\log 3-2\log 5}{1+\frac{1}{2}\log 0.36+\frac{1}{3}\log 8}$=?　(79 夜社)

解答　1

$$\frac{2+\log 3-2\log 5}{1+\frac{1}{2}\log 0.36+\frac{1}{3}\log 8}=$$

4 利用換底公式、連鎖律，求值

(1)連鎖律：$\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=$

(2)對數相乘化簡 $\xrightarrow{\text{想到}}$ ________________　__________________

(3)使用連鎖律時，常將底數、真數化為標準分解式看彼此的關係

例 8：求 $(\log_2 9+\log_4 3)\cdot(\log_3 8+\log_9 4)$之值

解答 10

$(\log_2 9+\log_4 3)\cdot(\log_3 8+\log_9 4)=$

例 9：$\log_a x=4$，$\log_b x=5$，$\log_c x=20$，求 $\log_{abc} x=?$

解答 2

5 利用換底公式、消去律，求值

(1) $a^{\log_a b}=b$ (________相消)

注意：使用消去律時，①____________須相同

②$\log_a b$ 前的____________

(2) $\dfrac{\log 4}{\log 3}=$________ (同底相除$\to$可用________________)

例 10：求下列各值(1) $\sqrt{3}^{\log_9 16}$　(2) $3^{\frac{\log 4}{2\log 3}}$　(3) $7^{\frac{-2}{\log_5 7}}$

解答　(1)2　(2)2　(3) $\dfrac{1}{25}$

(1) $\sqrt{3}^{\log_9 16}=$

(2) $3^{\frac{\log 4}{2\log 3}}=$

(3) $7^{\frac{-2}{\log_5 7}}=$

6 利用已知的對數值，求另一對數的值

例 11：已知 $\log_{12}3$ 的近似值是 0.44211，則 $\log_{12}2$ 計算到小數點後四位的近似值為何?，$\log_3 12$ 計算到小數點後二位的近似值為何? (75 自)

解答 0.2789；2.26

公式復習

$\log_a b \times \log_b a =$ ____

7 對數表示法

例 12：(1)設 $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$，以 a,b 表示 $\log_{42}14$

(2)設 $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$, $\log_7 11 = c$，以 a,b,c 表示 $\log_{66}44$

解答 (1) $\dfrac{1+ab}{1+a+ab}$ (2) $\dfrac{2+abc}{1+a+abc}$

(1) $\because \log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$ $\therefore \log_2 3 \times \log_3 7 = \log_2 7 = ab$

故 $\log_{42}14 = \dfrac{\log_2 14}{\log_2 42} = \dfrac{\log_2 2\times 7}{\log_2 2\times 3\times 7} = \dfrac{\log_2 2+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 7} = \dfrac{1+ab}{1+a+ab}$

(2)

3-4 對數函數

主題 1 對數函數的定義與圖形

1 對數函數的定義：$f(x)=\log_a x$，稱為以 a 為底數之對數函數

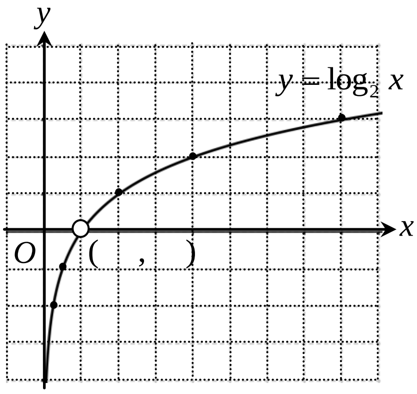
(1) $a>0$，$a\neq 1$

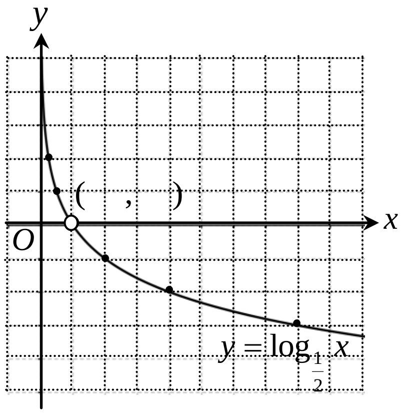
(2)定義域 $\{x \mid x>0\}$

(3)值域 $\{y \mid y\in R\}$

2 對數函數 $f(x)=\log_a x$ 圖形有兩種：

(1) $a>1$ 時，為嚴格遞增函數　　(2) $0<a<1$ 時，為嚴格遞減函數

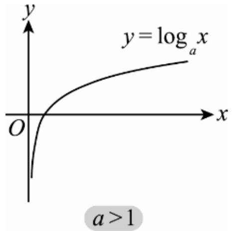


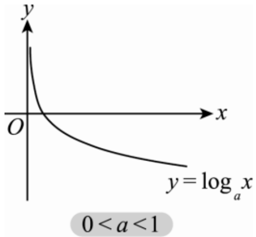


圖形特徵：

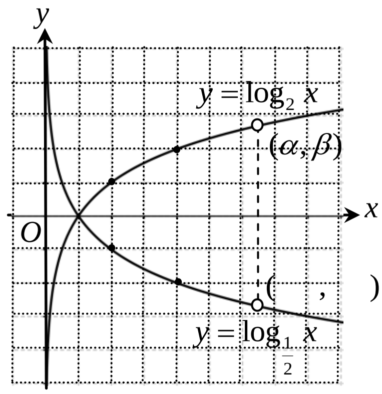
(1) $f(x)=\log_a x$ 圖形必過 點

(2)以 為漸近線





$\boxed{3}$ $y=\log_a x$，$y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 $\boxed{x\text{ 軸}}$



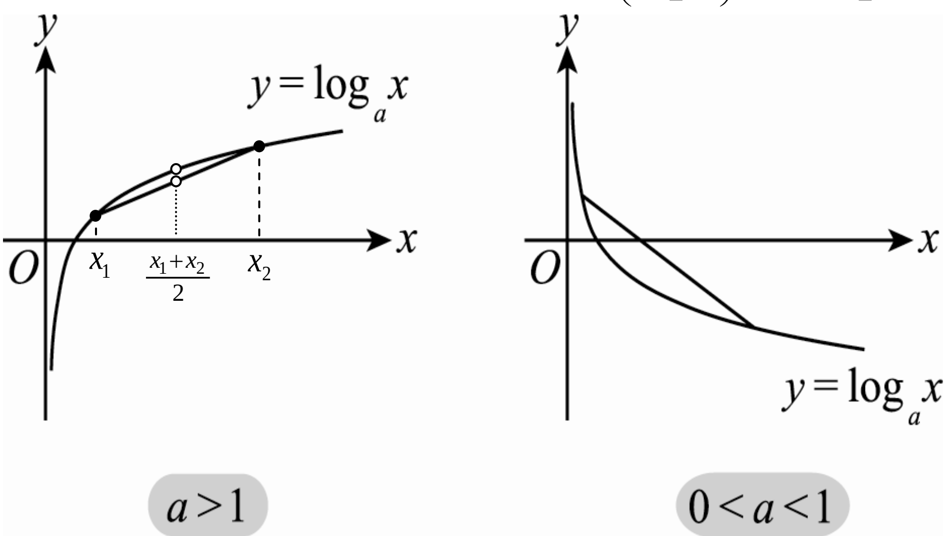
$\boxed{4}$ 凹性：

(1)凹口向上：圖形上任取相異二點的連線段恆在圖形的上方

(2)凹口向下：圖形上任取相異二點的連線段恆在圖形的下方

《說例》①$a>1$，$y=\log_a x$ 的的凹口向下：$\log_a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2}$

②$0<a<1$，$y=\log_a x$ 的的凹口向上：$\log_a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2}$

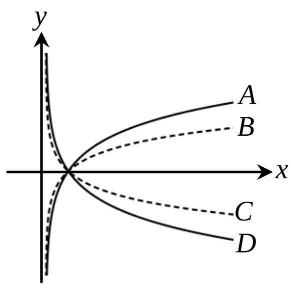


5 不同底數的對數函數圖形的比較

(1) $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_3 x \to$ ______________________

(2) $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x \to$ ______________________

《說例》試描繪下列函數圖形(以右圖 A,B,C,D 作答)



(1) $y=\log_2 x$____　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$____

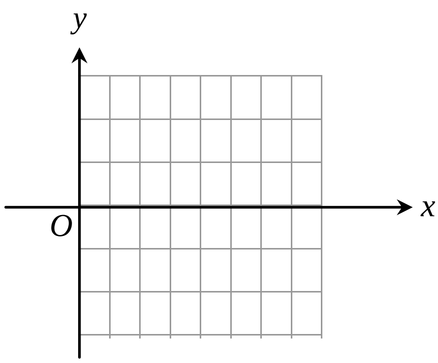
(3) $y=\log_3 x$____　(4) $y=\log_{\frac{1}{3}} x=-\log_3 x$____

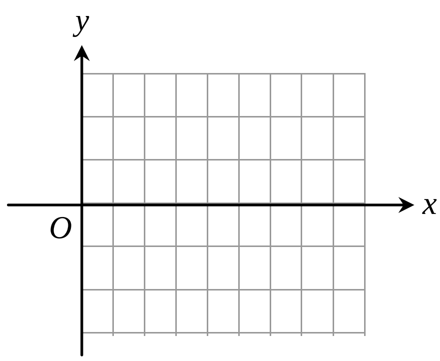
解答

描點法 $\to$ 求點坐標代入坐標系

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=\log_2 x$	3	2	1	0	-1	-2	-3
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$y=\log_3 x$	3	2	1	0	-1	-2	-3
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3





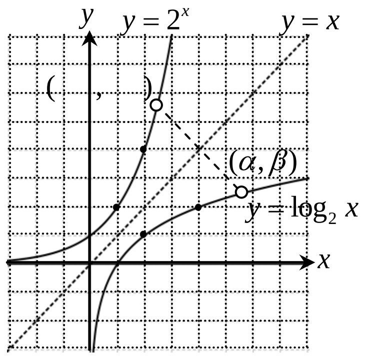
6 反函數：兩函數________________，互稱為反函數

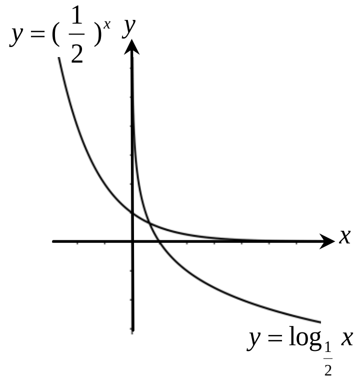
(1) $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 互為反函數

(2) $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 兩者的圖形對稱於直線 $y=x$

《說例》 ① $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 兩者圖形對稱於____________

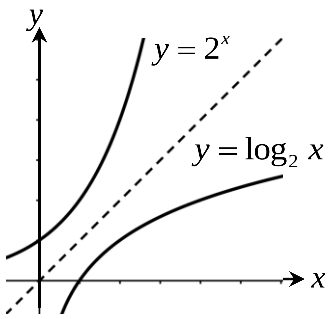
② $y=(\frac{1}{2})^x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 兩者圖形對稱於____________



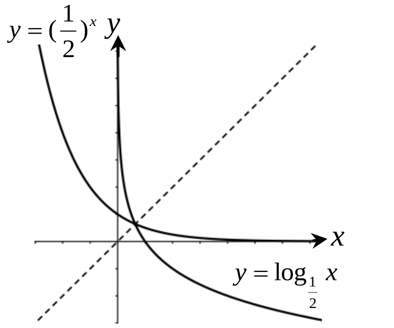


7 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 圖形的交點可能______________________

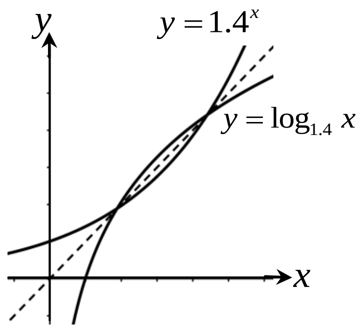
(1)



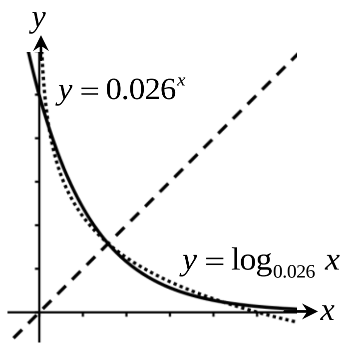
(2)



(3)



(4)



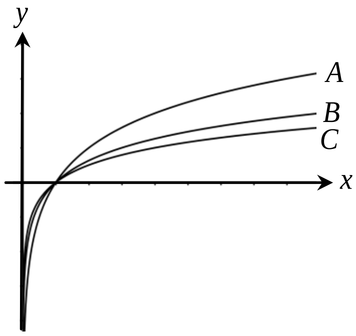
【1】底數大於 1 的對數函數

$\boxed{\text{例 1}}$：配合題

(1) $y=\log_2 x$：________

(2) $y=\log_3 x$：________

(3) $y=\log_4 x$：________



$\boxed{\text{解答}}$

令 x 為大於 1 之定值，則 $\log x>0$

$$\because \log_2 x=\frac{\log x}{\log 2}>\log_3 x=\frac{\log x}{\log 3}>\log_4 x=\frac{\log x}{\log 4}\qquad \therefore\begin{cases}(A)\leftrightarrow \log_2 x\\(B)\leftrightarrow \log_3 x\\(C)\leftrightarrow \log_4 x\end{cases}$$

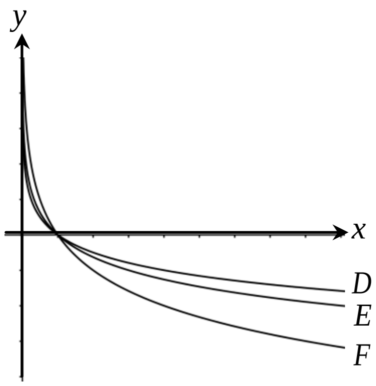
【2】底數介於 0 與 1 之間的對數函數

$\boxed{\text{例 2}}$：配合題

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$：________

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$：________

(3) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$：________



$\boxed{\text{解答}}$

令 x 為大於 1 之定值，則 $\log x>0$

$$\because \log_{\frac{1}{2}} x=\frac{\log x}{\log\frac{1}{2}}<\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{\log x}{\log\frac{1}{3}}<\log_{\frac{1}{4}} x=\frac{\log x}{\log\frac{1}{4}}\qquad \therefore\begin{cases}(D)\leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} x\\(E)\leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x\\(F)\leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x\end{cases}$$

【3】對數函數的點

$\boxed{\text{例 3}}$：若 (a,b) 是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上?(1) $(1,0)$　(2) $(10a,b+1)$　(3) $(2a,2b)$
(4) $(\frac{1}{a},1-b)$　(5) $(a^2,2b)$　(98 指考數乙)

$\boxed{\text{解答}}$　(1)(2)(5)

【4】指、對數函數的關係

例4：設 a 為大於1 的實數，考慮函數 $f\left(x\right)=a^{x}$ 與 $g\left(x\right)=\log_{a}x$，試問下列哪些選項是正確的？(多選)

(1)若 $f\left(3\right)=6$，則 $g\left(36\right)=6$　　(2) $\dfrac{f\left(238\right)}{f\left(219\right)}=\dfrac{f\left(38\right)}{f\left(19\right)}$

(3) $g\left(238\right)-g\left(219\right)=g\left(38\right)-g\left(19\right)$　　(4)若 P,Q 為 $y=g\left(x\right)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數　　(5)若直線 $y=5x$ 與 $y=f\left(x\right)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g\left(x\right)$ 的圖形也有兩個交點 (95學測)

解答　(1)(2)(4)(5)

(1)○　$\because a^{3}=6$　$\therefore$ ____________

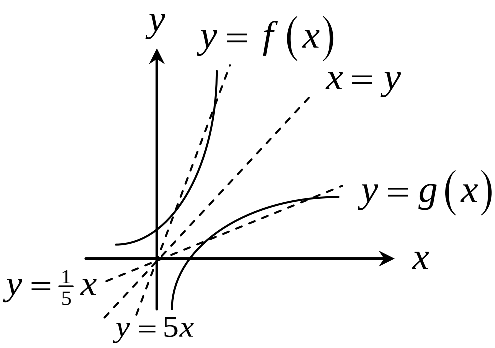
(2)○　$\because \dfrac{f\left(238\right)}{f\left(219\right)}=\dfrac{a^{238}}{a^{219}}=a^{238-219}=a^{19}$；$\dfrac{f\left(38\right)}{f\left(19\right)}=\dfrac{a^{38}}{a^{19}}=a^{38-19}=a^{19}$

$\therefore \dfrac{f\left(238\right)}{f\left(219\right)}=\dfrac{f\left(38\right)}{f\left(19\right)}$

(3)×　$\because g\left(238\right)-g\left(219\right)=\log_{a}238-\log_{a}219=\log_{a}\dfrac{238}{219}$

$g\left(38\right)-g\left(19\right)=\log_{a}38-\log_{a}19=\log_{a}\dfrac{38}{19}=\log_{a}2$

$\therefore g\left(238\right)-g\left(219\right)\neq g\left(38\right)-g\left(19\right)$



(4)○　設 $P\left(x_{1},y_{1}\right)$，$Q\left(x_{2},y_{2}\right)\in y=g\left(x\right)$

若 $x_{1}>x_{2}$，則 $y_{1}>y_{2}$

故斜率 $m_{PQ}=\dfrac{y_{1}-y_{2}}{x_{1}-x_{2}}>0$

(5)○　$\because y=5x$ 與 $y=\dfrac{1}{5}x$ 亦互為__________

$\therefore y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g\left(x\right)$ 亦交兩點

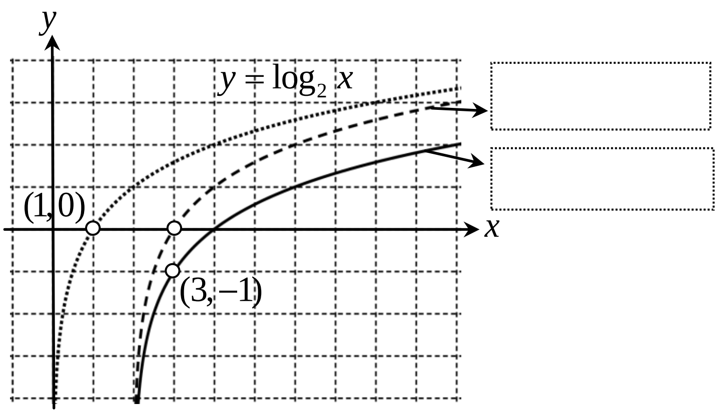
故選(1)(2)(4)(5)

主題 2 對數函數圖形的平移與伸縮

1 $y=f(x)\xrightarrow[\text{垂直平移}k\text{單位}]{\text{水平平移}h\text{單位}}$ 平移後得：______________

《例 1》 $y=\log_2 x$ 向右移動 2 單位，向下移動 1 單位後方程式為

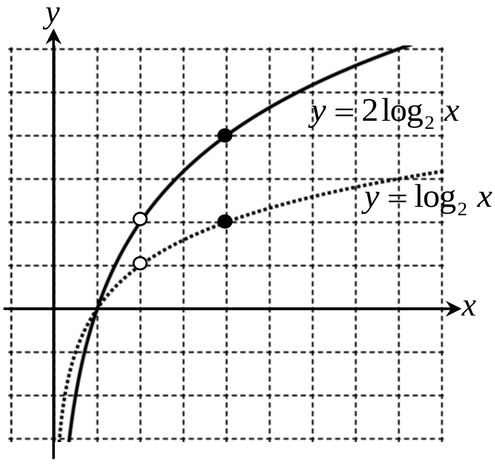
____

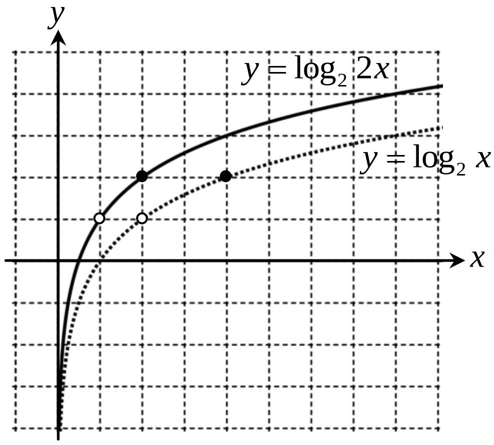


2 $y=f(x)\xrightarrow[\text{垂直伸縮}\beta\text{倍}]{\text{水平伸縮}\alpha\text{倍}}$ 伸縮後得：______________

《例 2》(1) $y=\log_2 x$________伸縮________後得 $y=2\log_2 x$

(2) $y=\log_2 x$________伸縮________後得 $y=\log_2 2x$



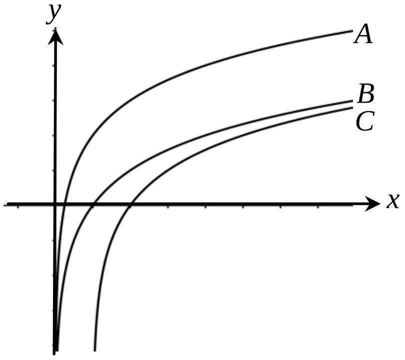


例 5：試繪以下圖形(以 A,B,C 作答)：

(1) $y=\log_2 x$：____

(2) $y=\log_2(x-1)$：____

(3) $y=\log_2 x+2$：____

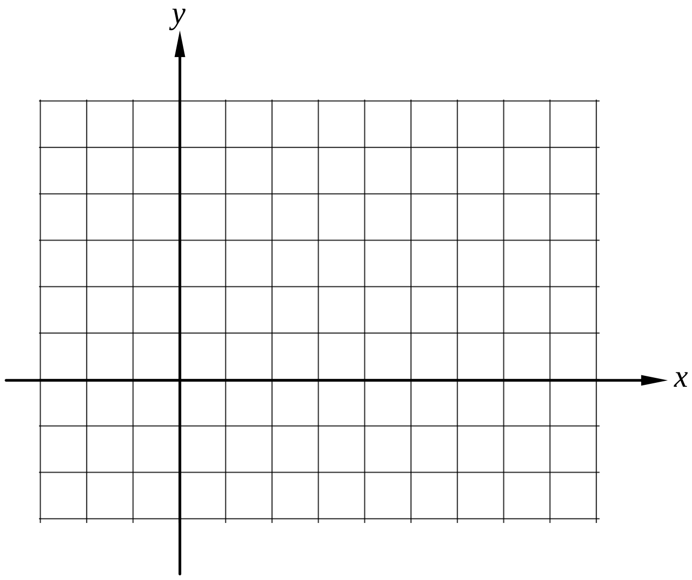


解答

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=\log_2 x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

x	9	5	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{8}$
$y=\log_2(x-1)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=\log_2 x+2$	5	4	3	2	1	0	-1

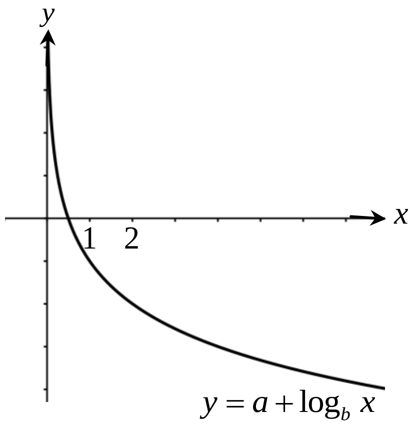


例 6：如圖為函數 $y=a+\log_b x$ 之部份圖形，其中 a,b 皆為常數，則下列何者為真？

(A) $a<0$，$b>1$　(B) $a>0$，$b>1$

(C) $a=0$，$b>1$　(D) $a>0$，$0<b<1$

(E) $a<0$，$0<b<1$　(88 社)



解答　(E)

例 7：右圖為函數 $y=a+\log_b(x+c)$ 的圖形，且以 $x=-1$ 為其漸近線，試問以下何者為真？

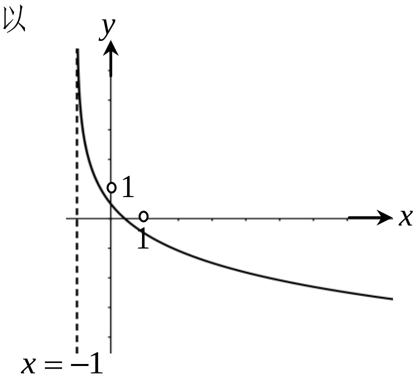
(A) $a>0$，$0<b<1$，$c>0$

(B) $a>0$，$0<b<1$，$c<0$

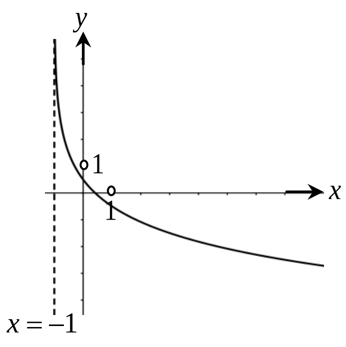
(C) $a>0$，$b>1$，$c>0$

(D) $a>0$，$b>1$，$c<0$

(E) $a<0$，$0<b<1$，$c>0$　(91 大考中心卷)



解答　(A)



(1) $\because$ 圖形為遞減函數的圖形　$\therefore$ ____________

(2) $\because$ 漸近線為 $x=-1$

$\therefore$ 圖形為 $y=\log_b x$ 向左移 1 單位而得，故 $\boxed{c=\quad}$

(3) 令 $x=$_____代入 $y=a+\log_b(x+c)$ 得 $y=a$

得 $y=a+\log_b(x+c)$ 與 y 軸交於 $(0,a)$，故 $a>0$

選(A)

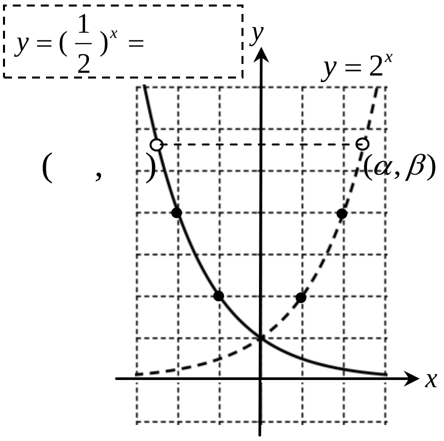
主題 3 兩對稱圖形

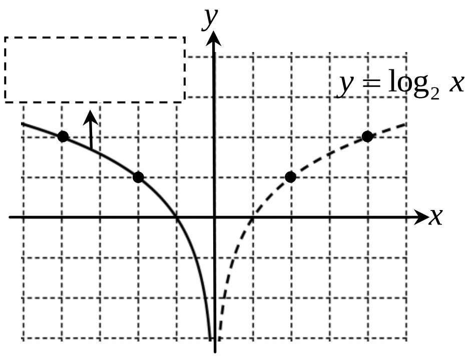
1 兩圖形的對稱

$y=f(x)$ 的圖形與圖形 Γ 對稱於 x 軸、 y 軸、原點時，圖形 Γ 的函數如下：

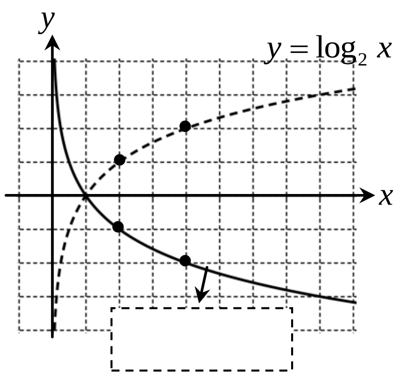
與 $y=f(x)$ 對稱於	x 軸	y 軸	原點
圖形 Γ 的函數	$-y=f(x)$	$y=f(-x)$	$-y=f(-x)$

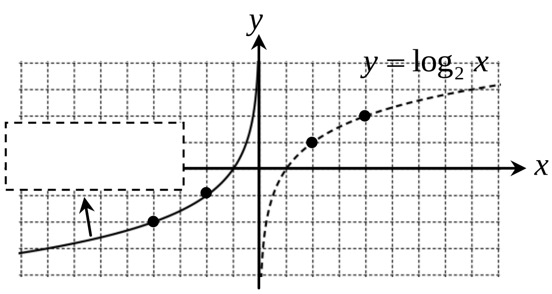
2 (1) $y=2^x$ 與 $y=2^{-x}$ 對稱於 ____ 軸　(2) $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_2(-x)$ 對稱於 ____ 軸



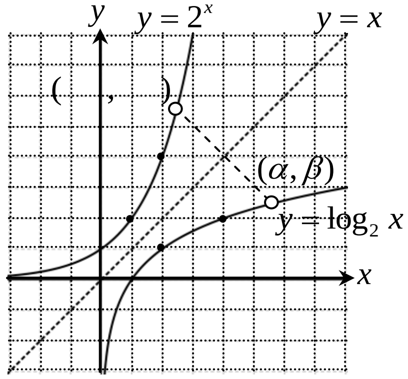


(3) $y=\log_2 x$ 與 $y=-\log_2 x$ 對稱於 ____ 軸　(4) $y=\log_2 x$ 與 $y=-\log_2(-x)$ 對稱於 ____





(5) $y=\log_2 x$ 與 $y=2^x$ 對稱於 直線



例 8：下列五組數中，哪幾組的兩個函數之圖形對稱於直線 $y=x$ (多選)

(1) $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$　(2) $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$　(3) $y=2^{-x}$ 與 $y=-\log_2 x$

(4) $y=2^x$ 與 $y=-2^x$　(5) $y=(\frac{1}{3})^x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

解答　(2)(3)(5)

(1)× $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形對稱於 軸

(2)○ $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(3)○ $y=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x$ 與 $y=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於 ________ .

(4)× $y=2^x$ 與 $y=-2^x$ 的圖形對稱於 軸

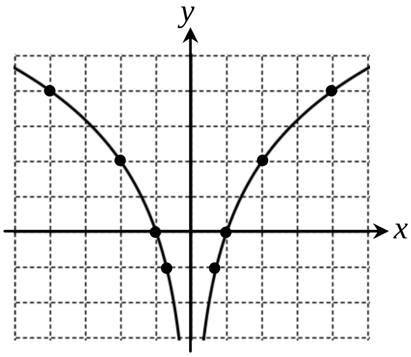
主題 4 絕對值對數函數的圖形

《說例 1》作圖 $y=\log_2|\ x\ |$

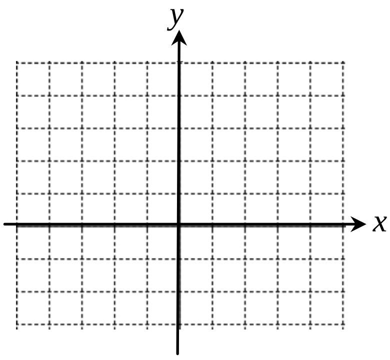
解答

法 1：描點法

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	–1	2	–2	4	–4
y	–1	–1	0	0	1	1	2	2



法 2：$y=\log_2|\ x\ |=\begin{cases} \\ \end{cases}$



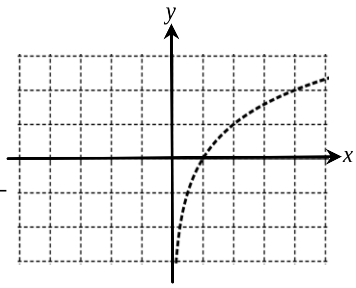
法 3：以對稱性作圖

(1) $\because \log_2|-x|=\log_2|x|$

$\therefore y=\log_2|\ x\ |$ 的圖形對稱於 $\boxed{\quad\quad}$ 軸

(2)先作 $x>0$ 之圖形，原式化為______________

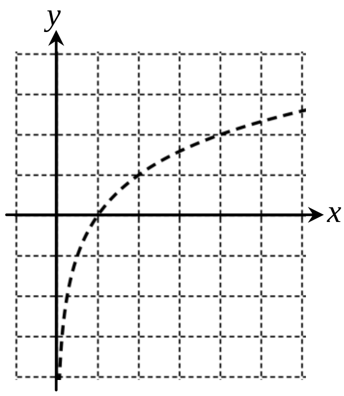
，再以對稱性作全圖



《說例 2》作圖 $y=|\ \log_2 x\ |$

解答

$\because y=|\ \log_2 x\ |=\begin{cases} \log_2 x\,,\ x\ge 1 \\ -\log_2 x\,,\ 0<x<1 \end{cases}$ $\therefore$



主題 5 方程式的實根數

方程式 $f(x)=g(x)$ 的 $\boxed{\text{實根}}$ 即 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 圖形 $\boxed{\text{交點的 } x \text{ 坐標}}$

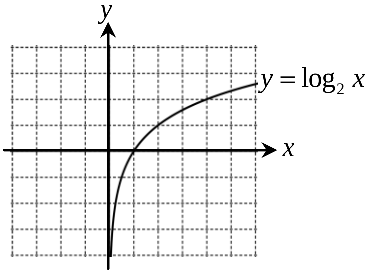
例 9：試求下列方程式之實根個數

(1) $x+\log_2 x=-1$(北一女)　(2) $\log_2(x+1)=x-1$

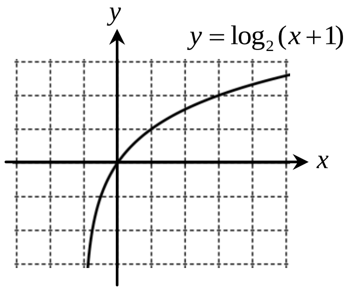
(3) $\log_2|x|=x-1$　(北一女)　(4) $|\log_2 x|=x-1$

解答　(1)1　(2)2　(3)3　(4)2

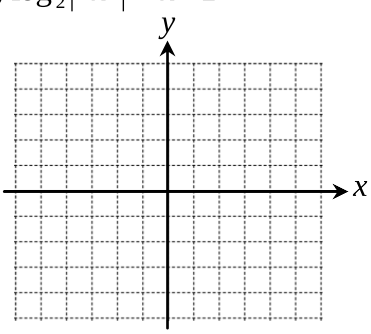
(1) $x+\log_2 x=-1 \Leftrightarrow \log_2 x=-x-1$



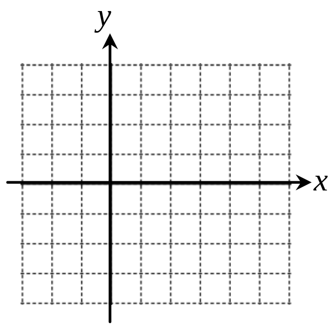
(2) $\log_2(x+1)=x-1$



(3) $\log_2|x|=x-1$



(4) $|\log_2 x|=x-1$

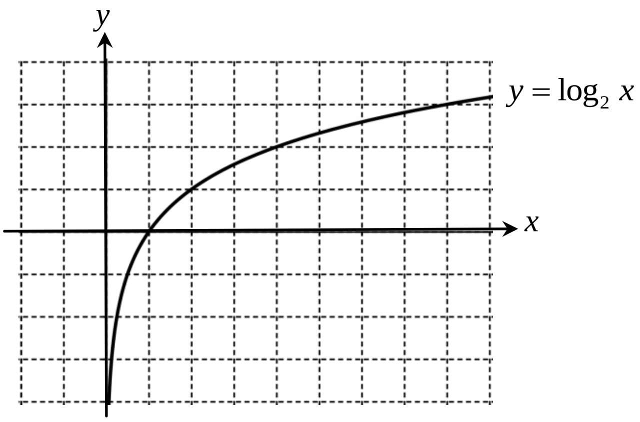


例 10：陳老師證明了 $x^2=2^x$ 有兩個正實數解及一個負實數解後，進一步說，此方程式兩邊各取 $\log_2$，得 $2\log_2 x=x$；陳老師要同學討論此新的方程式有多少實數解? 小英說：恰有三個實數解； 小明說：恰有兩個正實數解； 小華說：最多只有兩個實數解； 小毛說：仍然有兩個正實數解及一個負實數解； 小芬說：沒有實數解。 請問哪些人說的話，可以成立? (1)小英　(2)小明　(3)小華　(4)小毛　(5)小芬　(92 指考乙)

解答　(2)(3)

$x^2=2^x \xrightarrow{\text{兩邊取對數}\log_2}$ 得 $2\log_2 x=x \Leftrightarrow$ ________________

故 $2\log_2 x=x$ 的實數解即 ☐ 交點的 x 坐標



主題 6 對數方程式

解對數方程式的要領

(1)先找出解的範圍：①真數______　　②底數大於_____且不等於_____

(2)若 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$，則______________

(3)遇常數時，常化為對數，以方便利用對數和、差性質解題

$\boxed{\text{例 11}}$：解 $\log_6(x-1)+\log_6(x-2)=1$，得 x=? (景美女中)

$\boxed{\text{解答}}$　4

(1) $\log_6(x-1)+\log_6(x-2)=1$的限制

解對數方程式注意事項

不符合限制條件的解

需

(2) $\log_6(x-1)+\log_6(x-2)=1 \Leftrightarrow \log_6(x-1)(x-2)=\log_6 6$

$\Leftrightarrow \boxed{}$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=4$ 或 $x=-1$(　　　)

$\boxed{\text{例 12}}$：解方程式 $\log_{10}\left(10^{x}+100\right)=\frac{x}{2}+1+\log_{10}2$，則 $x=$(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

(88 推廣教育)

$\boxed{\text{解答}}$ (B)

$\log_{10}\left(10^{x}+100\right)=\frac{x}{2}+1+\log_{10}2 \Leftrightarrow$ ____________________________________

$\Leftrightarrow \log_{10}\left(10^{x}+100\right)=\log_{10}20\cdot 10^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 10^{x}+100=20\cdot 10^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 10^{x}-20\cdot 10^{\frac{x}{2}}+100=0$

$\boxed{\text{例 13}}$：求 $1+\log_{4}(x-1)=\log_{2}(x-9)$ 之實根

$\boxed{\text{解答}}$ 17

$1+\log_{4}(x-1)=\log_{2}(x-9)$

例 14：解方程式 $\log_2 x - 5\log_x 2 = 4$

解答　32 或 $\frac{1}{2}$

(1) $\log_2 x - 5\log_x 2 = 4$ 的限制：$\boxed{x>0\,,\,x\neq 1}$

(2)令 $t=\log_2 x$，則__________________

原式化為 $t-\frac{5}{t}=4 \Leftrightarrow t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow (t-5)(t+1)=0 \Leftrightarrow t=5$ 或－1

①當 $t=5$ 時，$\log_2 x=5 \Leftrightarrow x=2^5=32$

②當 $t=-1$ 時，$\log_2 x=-1 \Leftrightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

例 15：解方程式 $x^{\log x}=10^6 x$

解答　1000 或 $\frac{1}{100}$

☞ 含 $x^{\log x}$ →兩邊取 $\boxed{}$

$x^{\log x}=10^6 x$ 兩邊取 $\log_{10}$

得 $\log(x^{\log x})=\log(10^6 x) \Leftrightarrow \boxed{}$

主題 7 對數不等式

1 (1)若底數為假分數(即 $a>1$)時，$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow$ ____________

(2)若底數為真分數(即 $0<a<1$)時，$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow$ ____________

2 解題時：① $\log_{真} 真>0$

② $\log_{假} 假>0$

記法：真假同步>0

《例》

例 16：解不等式 $1+\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)\geq 0$ (84 夜大)

解答 $\frac{1}{3}<x\leq 1$

(1)自然限制：$3x-1>0$ 得 $x>\frac{1}{3}$

(2)原式化為______________________

$\boxed{\text{例 17}}$：解 $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{9}}(x+5)$　(和平高中)

$\boxed{\text{解答}}$　$1<x<4$

(1) 自然限制：$\begin{cases} x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases}$ 得 $x>1$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{9}}(x+5)$

$\Leftrightarrow$

對數性質

$\log_a b=$

$\boxed{\text{例 18}}$：解 $\log_3\left(3^x+8\right)\le\frac{x}{2}+1+\log_3 2$

$\boxed{\text{解答}}$　$\log_3 4\le x\le\log_3 16$

$\log_3\left(3^x+8\right)\le\frac{x}{2}+1+\log_3 2$

$\Leftrightarrow$ ____

$\Leftrightarrow\ \log_3(3^x+8)\le\log_3(6\times3^{\frac{x}{2}})$

得 $3^x+8\le6\cdot3^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow(3^{\frac{x}{2}})^2-6\cdot3^{\frac{x}{2}}+8\le0\Leftrightarrow(3^{\frac{x}{2}}-4)(3^{\frac{x}{2}}-2)\le0$

得 $2\le3^{\frac{x}{2}}\le4$

$\boxed{\text{例 19}}$：解 $\log\left[\log_2(\log_5 x)\right]<0$

$\boxed{\text{解答}}$ $5<x<25$

$\log\left[\log_2(\log_5 x)\right]<0$

$\Leftrightarrow$

剝殼法

由_____而_______去

主題 8 求極值

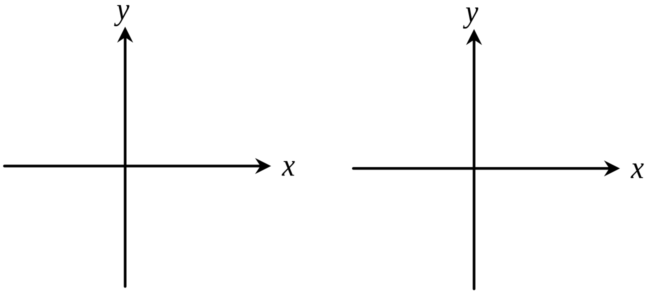
【1】置換法求極值

$\boxed{1}$ 使用置換法時，小心置換後是否有範圍限制

$\boxed{2}$ 有範圍限制的二次函數的極值，產生在$\boxed{\text{頂點或範圍限制端點}}$處

《**說明**》若 $f(x)=ax^2+bx+c$， $\alpha\le x\le\beta$，則 $f(x)$ 的極值產生在

$x=h$、 $x=\alpha$ 或 $x=\beta$ 處



$\boxed{\text{例 20}}$：已知 $1\le x\le 100$， 求 $f(x)=(\log x)^2-4\log x+5$ 的最大值與最小值

$\boxed{\text{解答}}$ 5,1

令 $t=\log x$， 則 $\log 1\le t\le \log 100$ ， 得 $0\le t\le 2$

$\because$ $f(x)=(\log x)^2-4\log x+5=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$， $0\le t\le 2$

t	0	2
$f(x)$	5	1

$\therefore$ 最大值=5； 最小值=1

【2】分式型對數函數的極值

例 21：已知 $x \in R$，求 $f(x)=\log_3 \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 之最大值與最小值

解答 1,－1

令 $t=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

則 $(t-1)x^2-(t+1)x+t-1=0$

$\because x \in R$

$\therefore$

【3】算幾不等式與對數函數極值

算幾不等式

(1) 若 $a,b>0$，則①____________________ ②”=”成立的條件：____________

(2)若 $a,b,c>0$，則① $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ ②” = ”成立的條件：$a=b=c$

$\boxed{\text{例 22}}$：設 $x>0$， $y>0$，且 $2x+y=6$，則 $2\log_2 x+\log_2 y$ 之最大值

$\boxed{\text{解答}}$ 3

$2\log_2 x+\log_2 y=\log_2 x^2+\log_2 y=\log_2(x^2y)$

【4】 $x^{\log x}$ 型，求極值：$\log$ 在指數上 $\to$ 兩邊取____________，將 $\log$ 拉下來

例 23：若 $1\le x\le 100$，求 $f(x)=x^{1-\log x}$ 之最大值與最小值 (成淵高中)

解答 最大值 $10^{\frac{1}{4}}$，最小值 $\frac{1}{100}$

$\because 1\le x\le 100$ $\therefore \log 1\le \log x\le \log 100$ 得 $0\le \log x\le 2$

由 $f(x)=x^{1-\log x}$ 兩邊取 $\log$ 得

$$\log f(x)=\log x^{1-\log x}=(1-\log x)\cdot \log x=-(\log x)^2+\log x=-\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

又 $\because 0\le \log x\le 2$

$\log x$	0	$\frac{1}{2}$	2
$\log f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	-2

$\therefore \log f(x)$ 之最大值 $=\frac{1}{4}$；最小值 $=-2$

(1) $\log f(x)=\frac{1}{4}$ 時， $f(x)$ 有最大值=

(2) $\log f(x)=-2$ 時， $f(x)$ 有最小值=

3-5 指數與對數的應用

主題1 對數表

1 常用對數表：$y=\log_{10}x$（真數 x 的範圍:____________，故____________）

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3076	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

■對數表所給的對數值皆近似值至小數以下第四位

《說例》(1)①log1.89=　　　　②log3.08=

(2)log154000=

(3)log0.00294=

(4)og x =3.2201 ⇒ x =

2 常用對數值

(1)log2= (2)log3=

(3)log4= (4)log5=

(5)log6= (6)log7=

(7)log8= (8)log9=

例 1：已知 log1965=3.2931，則

(1)log196.5=? (2)log0.001965=?

(3)若 $\log x=4.2931$，則 $x=?$ (4)若 $\log x=-2.7069$，則 $x=?$

解答 (1)2.2931 (2)－2.7069 (3)1.965×10^{4} (4)1.965×10^{-3}

∵$\log 1965=\log 1.965\times 10^{3}=3+\log 1.965=3.2931$

∴$\log 1.965=0.2931$

(1)log196.5=

(2)log0.001965=

(3)$\log x=4.2931=4+0.2931$

(4)$\log x=-2.7069=$____________________

主題 2　內插法

1　內插法淺談

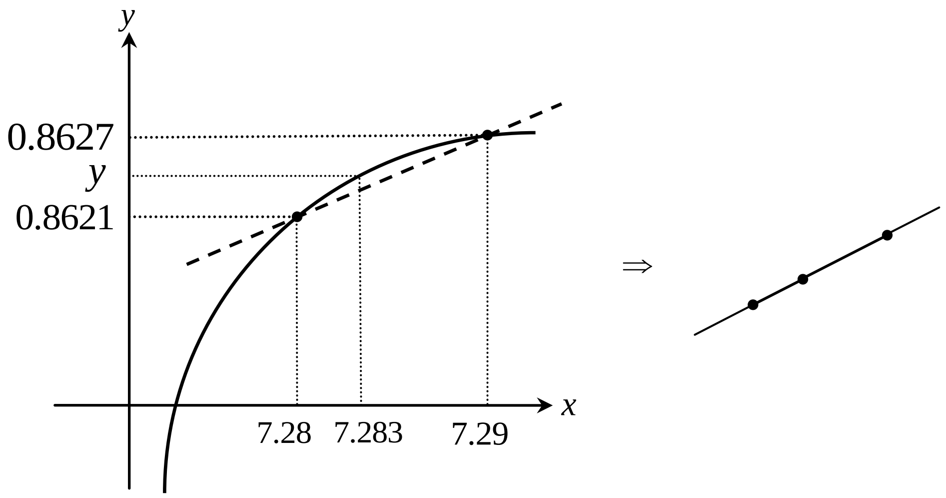
(1)內插法是求「函數值＿＿＿＿＿＿＿＿」的方法

(2)使用內插法的前提：「x 的變化量須＿＿＿＿＿，對應的函數值變化量相對的也很小」

(3)內插法是以$\boxed{\text{線性函數值}}$作近似值，故以＿＿＿＿＿＿解之較易

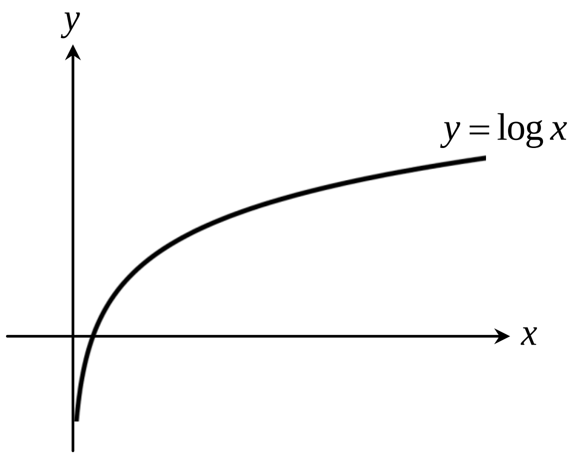
2　實例：已知 log7.28=0.8621，log7.29=0.8627，求 log7.283=?

解答



例 2：已知 log4.37=0.6405，log4.38=0.6415，若 $\log x$=0.6412，求 x=?

解答



例 3：已知 log72800=4.8621，log0.000729=−3.1373，求 log72830=?

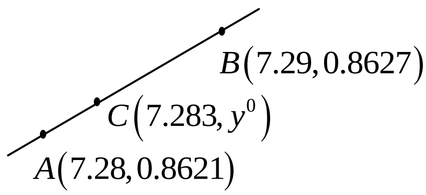
解答

(1)①log72800=4.8621 $\Leftrightarrow$ $\log 7.28\times10^4=4.8621$ $\Leftrightarrow$ $\log 7.28=0.8621$

②log0.000729=−3.1373 $\Leftrightarrow$ $\log 7.29\times10^{-4}=-4+0.8627$ $\Leftrightarrow$ $\log 7.29=0.8627$

③ $\log 72830=\log 7.283\times10^4=4+\log 7.283$

(2) $\because m_{AC}=m_{AB}$



$$\therefore \frac{y_0-0.8621}{7.283-7.28}=\frac{0.8627-0.8621}{7.29-7.28}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0-0.8621}{0.003}=\frac{0.0006}{0.01}$$

$$\Leftrightarrow y_0=0.8621+\frac{0.0006}{0.01}\times0.003=0.86228$$

故 $\log 72830=4+\log 7.283=4+0.86228=4.86228$

主題 3 取對數求值

例 4：試利用對數表求 $\sqrt[3]{5.261^{10}}$ 的近似值（近似到整數位）

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316

解答 253

令 $a=\sqrt[3]{5.261^{10}}$（兩邊取__________）

得 $\log a=\log\sqrt[3]{5.261^{10}}$

log 求值的時機

(1) __________運算，很難計算時

(2) __________求值，很難計算時

(3)指數式求值，____________或很難計算時

主題 4 等比數列與級數

1 等比數列$(G.P.)$：滿足 $\boxed{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r \text{ 且 } r\neq\_\_\_\_\_}$ 的數列，r 稱公比

《例》(1)細菌分裂繁殖數列：

(2)複利數列：

(1)第 n 項 $a_n=a_1 r^{n-1}$

證：

$\langle a_n \rangle$ 為等比數列，則 $\langle a_n \rangle$：________________________________

故第 n 項 $a_n=a_1 r^{n-1}$

(2)若 a,b,c 三數成等比數列，則稱 b 為 a,c 之等比中項或幾何平均數且 $\boxed{b^2=ac}$

《說例 1》若 $a_n=3^n$，則 $\langle a_n \rangle$：______________________，$r=$______

《說例 2》$2,x,8$ 三數成等比數列，則 $x=$________

《說例 3》一數列$\{a_n\}$的首項 $a_1=1$ 且滿足關係式 $2a_n+a_{n+1}=0$，求此數列之一般項 $a_n=$ $\boxed{(-2)^{n-1}}$

解答

$2a_n+a_{n+1}=0 \Leftrightarrow a_{n+1}=-2a_n$ 得____________________

故 $a_n=$

2 等比級數($G.S.$)：等比數列各項的總和，又稱幾何級數。

設$\langle a_n \rangle$為等比數列，a_1表首項，r表公比，S_n表首n項之和

則 $S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}, 當 r \neq 1 \\ n a_1, 當 r = 1 \end{cases}$

《證》

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \\ -\;)\; r \cdot S_n = & \quad\quad a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\ \hline \end{array}$$

$(1-r)S_n = a_1 - a_1 r^n = a_1(1-r^n)$

(1)當 $r \neq 1$時，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

(2)當 $r = 1$時，$S_n = n a_1$

例 5：設一等比數列的第 3，4 項分別是$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{6}$，求這數列的第 7 項為何?

解答 $\dfrac{1}{162}$

設數列的首項=a，公比=r

$\because \begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{2} \\ a_4 = \dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \\ \end{cases}$

例 6：設一等比數列的第 3 項是$\frac{1}{2}$，第 5 項是 2，而且數列的每一項都是正數，求這數列的前 8 項的總和

解答

設數列的首項為a，公比為r

$$\because \begin{cases} a_3=\dfrac{1}{2} \\ a_5=2 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \\ \end{cases}$$

觀念

等比數列的每一項皆為正數，公比必為__________

例 7：設一等比數列之首項為 7，末項為 448，總和為 889，此數列共幾項

解答 7

設數列首項為a，公比為r，共n項

$$\because \begin{cases} a=7 \\ ar^{n-1}=448 \\ S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=889 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 7\cdot r^{n-1}=448 \\ \dfrac{7\cdot(1-r^n)}{1-r}=889 \end{cases} \text{得} \begin{cases} r^{n-1}=64\cdots(1) \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}=127\cdots(2) \end{cases}$$

例 8：設 a,b,c,d 四正數成等比數列，若 $a+b$=8， $c+d$=72，則公比=?

解答　3

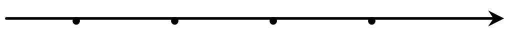
設公比為 r

$\because a+b$=8， $c+d$=72

$$\therefore \begin{cases} a+ar=8 \\ ar^2+ar^3=72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(1+r)=8\cdots(1) \\ ar^2\cdot(1+r)=72\cdots(2) \end{cases}$$

例 9：假設某鎮每年的人口數逐年成長，且成一等比數列，已知此鎮十年前有 25 萬人，現在有 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有幾萬人(求到小數點後一位)　(84 學測)

解答　**43.2 萬人**



主題 5 首數與尾數的應用

1 科學記號：試將下列各數分別以科學記號表示

(1)5427000=

(2)0.000123=

(3) $\frac{29}{10000}=$

2 首數與尾數

若 $a=b\times10^n$，其中 $n\in Z$， $1\le b<10$ (任意正實數 a 都可表為 $\boxed{\text{科學記號}}$)

則 $\log a=\log b\times10^n=$________________

$\Rightarrow \log a=\boxed{}+\boxed{}$ $(\because 0\le \log b<1)$

稱整數 n 為 $\log a$ 的首數， $\log b$ 為 $\log a$ 的尾數

《說例 1》試求下列對數之首數與尾數

(1) $\log 516000$

$\Rightarrow$首數=________，尾數=______________

(2)log0.00516

$\Rightarrow$首數=________，尾數=______________

(3) $\log x=-3.42$

$\Rightarrow$首數=________，尾數=_____________

(4) $\log x=\sqrt{5}$

$\Rightarrow$首數=_________，尾數=_______________

《說例 2》已知 $\log a=-5.6376$,則 $\log\sqrt[4]{a}$ 的首數為______，尾數為__________

3 首數與尾數的功用：設正實數 $a=b\times10^{n}$ (即 a 科學記號表示)

$\log a=n+\log b$,$n\in Z$,$0\le\log b<1$，其中 n 為首數，$\log b$ 為尾數

(1) a 的最高位數數字=b 的整數位數數字

(2)夾擊性：_____ $\le\log a<$ _________

(3)若 $a>1$，則 a 的整數部分為 $\boxed{\quad\quad}$ 位

(4)若 $0<a<1$，則 a 自小數以下第 $\boxed{\quad\quad}$ 位使不為 0

《說例 3》(1) $a=5120.7=$___________________

$\Rightarrow \log a=3+\log5.1207$ (即首數=3，尾數=$\log5.1207$)

①a 的整數部分為 4 位數=_____________

②a 的最高位數=_____=尾數 $\log5.1207$ 中真數的整數部分

(2) $a=0.000512=$_________________

$\Rightarrow \log a=-4+\log5.12$ (即首數=-4，尾數=$\log5.12$)

①a 自小數以下第_____位數始不為 0

②a 始不為 0 的數字=_____=尾數 $\log5.12$ 中真數的整數部分

(5)尾數相同的條件：

設 $x>0$， $y>0$，$\log x$ 與 $\log y$ 的尾數相同 $\Leftrightarrow$ $\boxed{}$

【1】小數 a 始不為 0 的位數與數字

例 10：已知 $a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$， 求：

(1) a 自小數點以下第幾位使不為 0 (2)始不為 0 的數字為何?

解答 (1)48 (2)1

$a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ 兩邊取 log

得 $\log a=\log\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}=\log(3^{-1})^{100}=-100\times\log 3=-100\times 0.771=-47.71=-48+0.29$

(1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ 自小數以下第$\boxed{位}$始不為 0

(2)

【2】 $a=b^n$ 展開後的位數

例 11：求 3^{100} 之(1)位數 (2)最高位數數字(已知 log3=0.4771) (3)個位數字

解答 (1)48 (2)5 (3)1

令 $a=3^{100}$

則 $\log a=\log 3^{100}=100\times\log 3=100\times 0.4771=47.71=47+0.71$

(1) 3^{100} 之位數為________

(2) 3^{100} 之最高位數數字 ＝________

(3)∵

3^n	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	…
3^n 展開的個位數							

【3】數字和進位條件：最高位數和

例 12：已知 log2=0.30103，log3=0.47712

(1)比較 2^{106}與3^{66}之大小　(2)求 2^{106}與3^{66}之位數　(3)求 $2^{106}+3^{66}$之位數

解答　(1) $2^{106}>3^{66}$　(2)32,32　(3)33

(1)　∵ ①$\log 2^{106}=106\times\log 2=106\times 0.30103=31.90918=31+0.90918$

②$\log 3^{66}=66\times\log 3=66\times 0.47712=31.48992=31+0.48992$

∴ $2^{106}>3^{66}$

(2)由(1)得 2^{106} 與 3^{66} 皆為 $\boxed{\qquad\text{位數}}$

(3)∵①$2^{106}$ 之最高位數數字=________

②$3^{66}$ 之最高位數數字=________

∴$2^{106}+3^{66}$ 為 32＋1=33 位數

【4】取對數解指數不等式

例 13：設 n 為自然數，則滿足 $10^{n-1}>9^n$ 之 n 的最小值為何? (84 學測)

解答　22

☞ 指數不等式不能化同底數時 $\rightarrow$____________________

$10^{n-1}>9^n$ (兩邊取__________)

得________________________________

【5】等比數列與對數

例 14：設 $n\in N$，數列 $\langle a_n\rangle$ 定義為 $a_n=(1.25)^n$，問此數列中”整數部分為三位數”者，計有多少項?

解答　10

令 $a_n=(1.25)^n=$__________________

則 $\log(1.25)^n=$

得 $\boxed{\quad\quad\le \log(1.25)^n<\quad\quad}$

$\Rightarrow 2\le n\cdot\log 1.25<3$

【6】夾擊性求位數

$\boxed{\text{例 15}}$：已知 47^{100} 為 168 位數，求：

(1)47^{17} 為幾位數?　　(2) $\frac{1}{47^{17}}$ 在小數點以下第幾位始不為 0?

$\boxed{\text{解答}}$　(1)29　(2)29

☞ 夾擊性：$\log a = n + \log b$，則____$\le \log a <$______

(1)$\because$ ________ $\le \log 47^{100} <$ ________

$\therefore 167 \le 100\log 47 < 168$

$\Rightarrow 1.67 \le \log 47 < 1.68$

$\Rightarrow$ ______________________________

$\Rightarrow 28.39 \le \log 47^{17} < 28.56$

得 $\log 47^{17}$ 的首數=________，故 47^{17} 為 $\boxed{\quad\quad 位數}$

(2)$\log \frac{1}{47^{17}}$ = ________________ $= -17 \cdot \log 47$

$\because 1.67 \le \log 47 < 1.68$

$\therefore$ ______________________________

$\Rightarrow -28.56 < \log 47^{-17} \le -28.39$

得 $\log 47^{-17}$ 的首數=________，故 47^{-17} 自小數以下 $\boxed{第\quad\quad 位數}$ 始不為 0

【7】尾數相同問題

例 16：(1)設 $10<x<100$，又 $\log x^2$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 之尾數相等，求 x=? (2)設 $\log x$ 的首數=3，且 $\log \frac{x}{5}$ 的尾數是 $\log x$ 尾數的兩倍，求 x 的值

解答　(1)$10^{\frac{4}{3}}$，$10^{\frac{5}{3}}$　(2)2000

(1)①∵ $\log x^2$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 之尾數相等

∴ $\boxed{}$

②∵ $10<x<100$　∴ $1<\log x<2 \Rightarrow 3<3\log x<6$

又∵ $3\cdot\log x \in Z$

∴ $3\cdot\log x=4$ 或 $5 \Rightarrow \log x=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{5}{3} \Rightarrow x=10^{\frac{4}{3}}$ 或 $10^{\frac{5}{3}}$

(2)

主題 6 借、貸問題

1 複利公式：設本金 A 元，年利率為 r，本利和= P， n 為期數

(1) $P = A(1+r)^n$

(2)利息= $P - A$

(3)設年利率為 r，則半年利率=_______，四個月利率=_______

2 借貸利息計算概念

(1)利息是為了補償債主「慾望延遲、不能投資，借款人不還，通貨膨脹，……..」等損失的金額

(2)計息時，以 $\boxed{\qquad\qquad}$ 為基準，約定還款的本利和=實際還款的本利和

《**說例**》某人存入銀行 10000 元，言明年利率 4%，以半年複利計息，滿一年本利和為 Q 元。則 Q =______。 (91 學測補)

解答

【1】求本利和

例 17：本金 100 元，年利率 6%，每半年複利一次，五年期滿，共得本利和為＿＿＿元(元以下四捨五入)　(88 學測)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732

解答　134 元

半年利率=＿＿＿＿＿＿，本利和=＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

令 $a=1.03^{10}$，取 log 得

$$\log a=10\times\log 1.03=10\times 0.0128=0.128$$

【2】分期付款

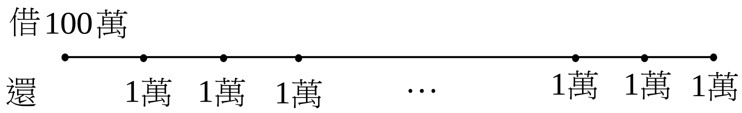
例 18：某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則某甲需要______年就可還清。

(答案以四捨五入計算成整數，而 log2=0.3010，log1.006=0.0026)

(88 自)

解答 13

設 n 個月後還清



①約定應還本利和=

②實際還款本利和=

由①②得 $100(1.006)^n=1+1.006+(1.006)^2+(1.006)^3+\cdots+(1.006)^{n-1}$

$\Leftrightarrow\ 100(1.006)^n=$

主題 7 情境題

【1】正、負成長率問題

例19：在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌1千隻，並且以每小時增加8%的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則100小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項?(1)9千隻 (2)108千隻 (3)2200千隻 (4)3200千隻 (5)32000千隻 (99年學測) ($\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

解答 (3)

設100小時後有 A 隻，則 $A = 1\times(1+8\%)^{100} = 1.08^{100}$ 千隻

兩邊取log得 $\log A = \log 1.08^{100} = 100\times\log 1.08$

例 20：小明身體不舒服，需依照醫生指示服藥。醫生告訴他這種藥吸收比較慢，當藥吞服 t 小時後，殘留在胃裡的藥量尚有 $M(t) = 450\times(0.64)^t$ 毫克，請問至少需要幾小時，藥量才能被吸收九成以上。(四捨五入至小數點第一位)

解答 5.2 小時

一開始的藥物量為__________________

吸收九成以上，即（藥物殘留量______________________）

$\because 450\times 0.64^t < 450\times 10\%$

$\therefore$

例 21：根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100\cdot\left(1-2^{-kt}\right)\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項?(1)5 小時 (2) $7\frac{1}{2}$ 小時 (3)9 小時 (4) $11\frac{1}{2}$ 小時 (5)13 小時

(92 學測)

解答 (4)

【2】指、對數互化題

例 22：目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$ 的關係如下：$\log E(r)=5.24+1.44r$

(1)某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少?

(2)試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量多少倍?(整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44}=27.54$)

(90 社)

解答 (1)10^{11} (2)758 倍

(1)$\because \log E(r)=5.24+1.44r$

$\therefore$ ______________________

得 $E(4)=10^{5.24+1.44\times4}=10^{11}$

(2) $\dfrac{E(6)}{E(4)}=$

例 23：已知在一容器中有 A，B 兩種菌，且在任何時刻 A，B 兩種菌的個數乘積為定值 10^{10}．為了簡單起見，科學家用 $P_A=\log(n_A)$ 來記錄 A 菌個數的資料，其中 n_A 為 A 菌的個數．試問下列哪些選項是正確的？(多選)
(1) $1\le P_A\le 10$　(2)當 $P_A=5$ 時，B 菌的個數與 A 菌的個數相同　(3)如果上週一測得 P_A 值為 4 而上週五測得 P_A 值為 8，表示上週五 A 菌的個數是上週一 A 菌個數的 2 倍　(4)若今天的 P_A 值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個　(5)假設科學家將 B 菌的個數控制為 5 萬個，則此時 $5<P_A<5.5$．(97 學測)

解答　(2)(5)

$\because P_A=\log(n_A)$　　$\therefore$ $\boxed{}$