第二章 多項式函數

2-1 簡單的多項式函數

主題1 多項式與函數

1 x的n次多項式：型如$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_1\cdot x+a_0$，$a_n\neq 0$的式子稱之

《**說例**》 $f(x)=-5x^4+3x^3-11x^2+4x-13$

(1) $f(x)$為x的$\boxed{\quad}$次多項式　(2)領導係數：________

(3)常數項：________　(4) $f(1)=$

2 函數的定義

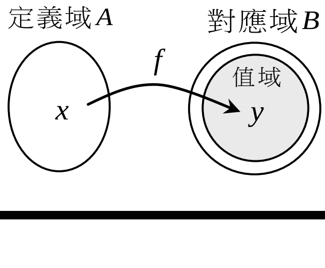
函數是用來描述兩變量x與y之間的對應關係，對自變數中每一x，恰有一應變數中的y與之對應，即稱y是x的函數，記為$y=f(x)$。

(1)自變數所在範圍稱為此函數的定義域

(2)應變數所在範圍稱為此函數的值域

(3)對部分函數而言，值域不容易看出，而用一比值域大的範圍做為應變數的取值範圍，則稱此取值範圍為函數的對應域

(4)定義域是A且對應域是B的函數f可表示為$f:A\to B$



3 函數的實例：在溫度的表示法中

攝氏溫度(℃)為 x 度，華氏溫度(℉)為 y 度，則其關係式為 $y=\frac{9}{5}x+32$

當攝氏 0 度時，是華氏 32 度；當攝氏 100 度時，是華氏 212 度

《**觀念**》函數可視為兩變量關係的表示法。在攝氏與華氏的表示法中

①以函數解析子表示：

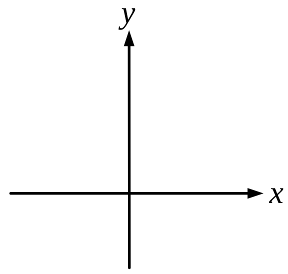
②以對應關係表示：函數的對應關係有＿＿＿＿＿與＿＿＿＿＿兩種

③以圖形表示：

當 y 是 x 的函數時，每

一鉛直線至多與函數圖

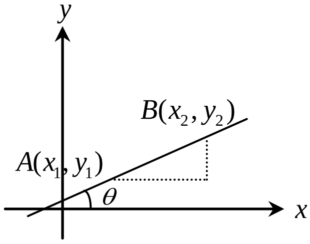
形只有 $\boxed{\quad 個}$ 交點



主題 2 直線斜率、直線方程式與一次函數

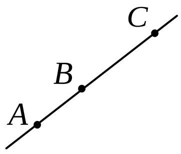
1 直線斜率 m：以直線的傾斜程度表直線的 方向

(1) $m=\dfrac{\text{垂直位移}}{\text{水平位移}}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$ ______ $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$



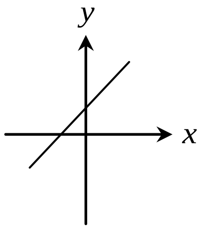
(2)斜率的唯一性：同一直線上，任相異兩點的斜率皆相等

《說明》



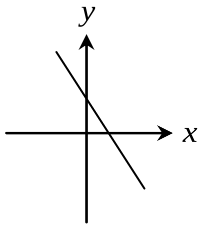
2 斜率的正負性

(1)右上斜直線



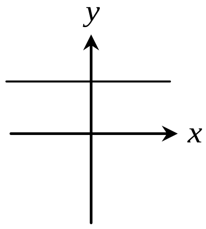
m ___ 0

(2)右下斜直線



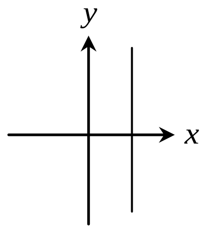
m ___ 0

(3)水平線



m ___ 0

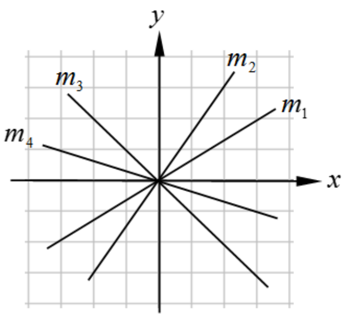
(4)垂直線



m ______

《說例》 比較下列各直線斜率的大小：______

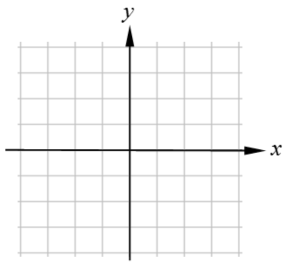
即【直線愈陡 ⇔ ______ 愈大】



3 直線 $L:ax+by=c$ 的斜率為=$\boxed{}$、x 截距=$\boxed{}$、y 截距=$\boxed{}$

《**說例**》試求下列各直線的截距與斜率，並描繪其圖形

直線	斜率	x 截距	y 截距
$L_1:2x-3y=6$			
$L_2:3x+2y=6$			
$L_3:3y+5=0$			
$L_4:3x-5=0$			



4 多項式函數為型如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的函數。

當 $f(x)$ 的次數為 n 時，稱為 n 次多項式函數

《**說例**》(1) $f(x)=3$ 為 $\boxed{\text{常數函數}}$

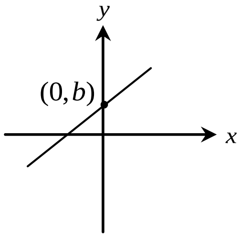
(2) $f(x)=2x-\sqrt{5}$ 為 $\boxed{\text{一次函數}}$

(3) $f(x)=2x^2-3x+1$ 為 $\boxed{\text{二次函數}}$

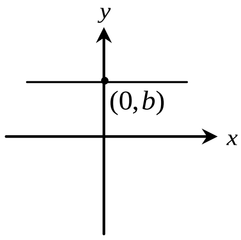
5 線性函數為型如 $f(x)=ax+b$ 者，其圖形為 $\boxed{\text{一直線}}$

(1) a 為 $\boxed{\text{斜率}}$；b 為 $\boxed{y\text{ 截距}}$

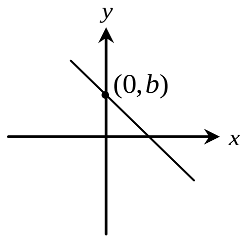
(2) $\begin{cases} f(x)=ax+b\ ,a\neq 0 \Rightarrow \text{稱為一次函數} \\ f(x)=ax+b\ ,a=0 \Rightarrow \text{稱為常數函數} \end{cases}$



斜率 $a>0$



斜率 $a=0$



斜率 $a<0$

例 1：已知一線型函數 $f(x)$ 的圖形通過 $A(-3,4)$ 且斜率為 $-\dfrac{2}{3}$，試求 $f(3)=?$

解答　0

$\because$ 斜率為 $-\dfrac{2}{3}$　　$\therefore$ 設 $f(x)=\boxed{}$

又 $\because A(-3,4)\in f(x)$

$\therefore -\dfrac{2}{3}\times(-3)+b=4\Rightarrow b=$

故 $f(3)=-\dfrac{2}{3}\times 3+=0$

主題 3 二次函數的配方

1 型如 $f(x)=ax^2+bx+c$,$a\neq 0$ 者稱為二次函數，其圖形為 $\boxed{}$

2 $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

證明 $ax^2+bx+c=\left(ax^2+bx\right)+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$\boxed{\text{例 2}}$：(1)若用配方法將二次函數 $y=2x^2+3x+1$ 寫成 $y=2(x-h)^2+k$ 的形式，

求 $h+k=$________

(2)若用配方法將二次函數 $y=-2x^2-4x+1$ 寫成 $y=-2(x-h)^2+k$ 的形式，求 $h+k=$__________

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $y=2x^2+3x+1$

(2) $y=-2x^2-4x+1$

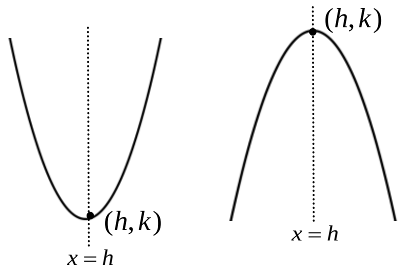
主題 4 二次函數的圖形研究

$\boxed{1}$ 型如 $f(x)=ax^2+bx+c$,$a\neq 0$ 者稱為二次函數，其圖形為 $\boxed{}$

$\boxed{2}$ $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 圖形之研究

(1)①開口向上：__________

②開口向下：__________

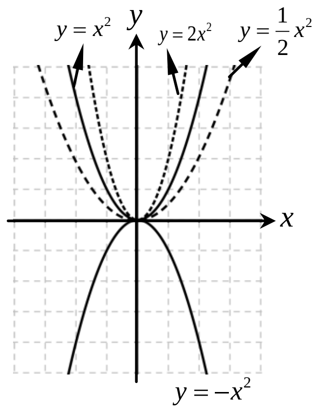


(2)頂點坐標為________________

(3)拋物線與 y 軸交點為 $\boxed{(0,c)}$

(4)對稱軸方程式：_____________

$\boxed{3}$ $y=ax^2$ 的圖形

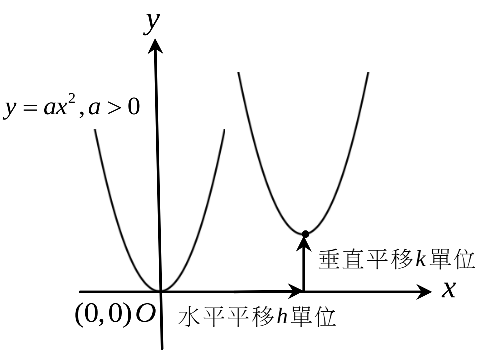


(1) $a>0$ 時，開口向_____； $a<0$ 時，開口向_____

(2) $|a|$ 越________，拋物線開口越小

(3) $y=x^2$ 與___________兩圖形對稱於 x 軸

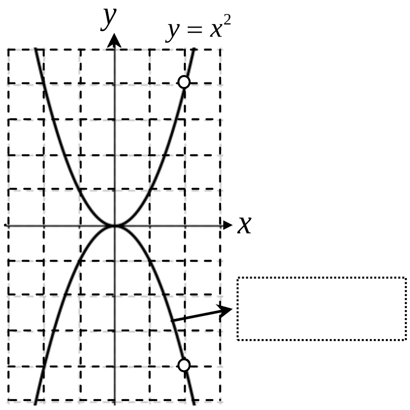
$\boxed{4}$ 拋物線 $y=ax^2$ $\xrightarrow[\text{鉛直移動}k\text{單位}]{\text{水平移動}h\text{單位}}$ 後得拋物線：$\boxed{}$



【甲】圖形的伸縮

1　觀察 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的圖形，並說明圖形間的關係

解答



描點法繪出 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的圖形

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4
$y=-x^2$	-4	-1	0	-1	-4

《**結論**》 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為拋物線

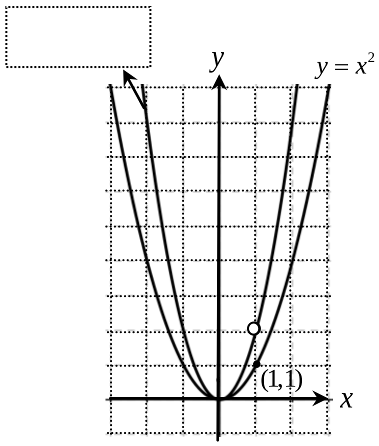
①$a>0$，開口向上；$a<0$，開口向下

②$y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的頂點坐標：(0,0)

③$y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的對稱軸皆為 y 軸：$x=0$

2　觀察 $y=x^2$ 和 $y=2x^2$ 的圖形，並說明圖形間的關係

解答



描點法繪出 $y=x^2$ 和 $y=2x^2$ 的圖形

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4
$y=2x^2$	8	2	0	2	8

《**結論**》圖形的伸縮

①$\Gamma:y=x^2$ 的圖形，沿 y 軸方向按___________的比例作伸縮，就得到 $\Gamma':y=2x^2$ 的圖形

②拋物線 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中_______越大，拋物線開口越小

【乙】圖形平移探討

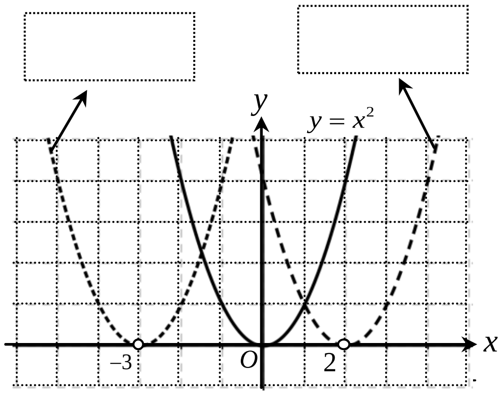
1 $f(x)=ax^2 \xrightarrow[\text{鉛直移動}k\text{單位}]{\text{水平移動}h\text{單位}}$ 平移後得：$\boxed{}$

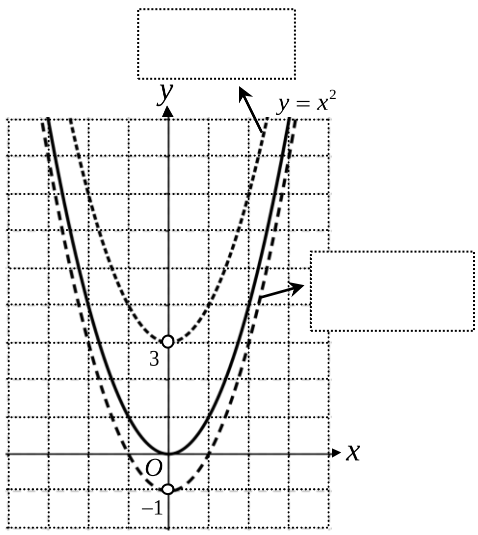
(1) $y=x^2$ 的圖形向________移_______單位得到 $y=(x+3)^2$ 的圖形

(2) $y=x^2$ 的圖形向________移_______單位得到 $y=(x-2)^2$ 的圖形

(3) $y=x^2$ 的圖形向________移_______單位得到 $y=x^2-1$ 的圖形

(4) $y=x^2$ 的圖形向________移_______單位得到 $y=x^2+3$ 的圖形





2 **圖形的平移→平移多少，就$\boxed{}$多少**

(1)函數 $y=f(x) \xrightarrow[\text{鉛直移動}k\text{單位}]{\text{水平移動}h\text{單位}}$ 得____________________________

(2) $y=ax^2$ 的圖形向水平方向移動 h 單位就得到______________的圖形

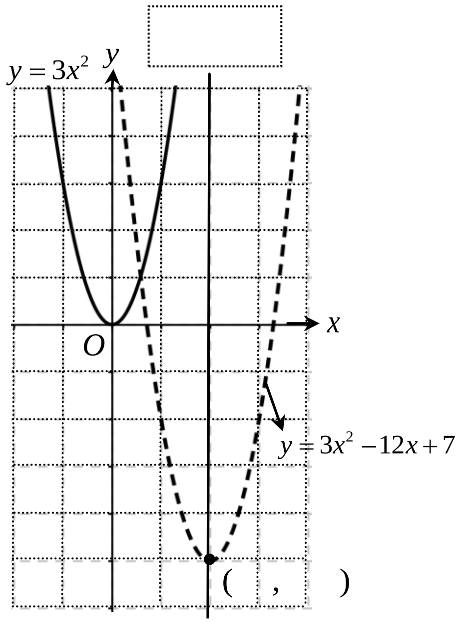
(3) $y=ax^2$ 的圖形向垂直方向移動 k 單位就得到______________的圖形

【丙】二次函數圖形的描繪

1 描出二次函數 $y=3x^2-12x+7$ 的圖形與 $y=3x^2$ 的圖形比較，並求出其頂點及對稱軸

解答

$y=3x^2-12x+7$



(1)頂點坐標為____________

(2)對稱軸為_____________

2 拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的作圖

(1) $y=ax^2+bx+c$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k$ 可求出拋物線的頂點為_________，對稱軸為____________

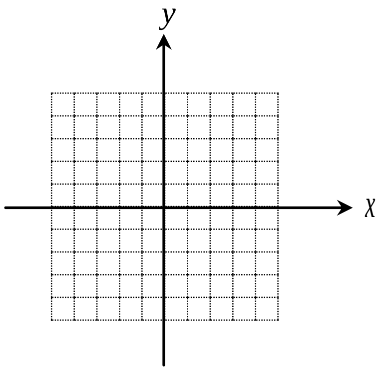
(2) $y=3x^2$ 的圖形向_______移動 2 單位，向______移動 5 單位，就得 $y=3(x-2)^2-5=3x^2-12x+7$ 的圖形

例 3：作圖 $f(x)=x^2-2x-3$ 二次函數的頂點坐標、對稱軸方程式與 x 軸的交點

解答

$f(x)=x^2-2x-3$

x					
y					



①頂點坐標為______________

②對稱軸方程式為__________

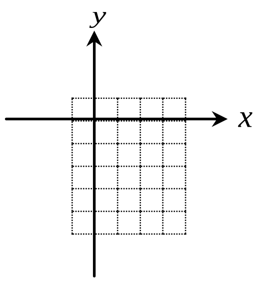
③與 x 軸交點__________________

例 4：作圖 $f(x)=-x^2+4x-7$ 的頂點坐標、對稱軸方程式與 x 軸的交點

解答

$f(x)=-x^2+4x-7$

x			
y			



①頂點坐標為______________

②對稱軸方程式為__________

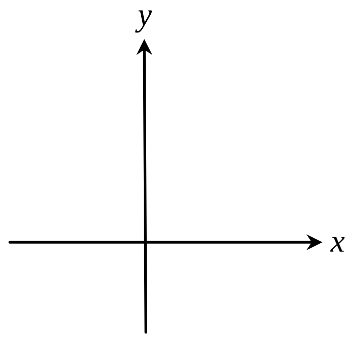
③與 x 軸__________________

例 5：設 a 與 b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$。試問下列何者為真？(A) $f(0)>0$ (B) $f(-1)>0$ (C) $f(-2)>0$ (D) $f(-3)>0$ (E) $f(-4)>0$ (87 學測)

解答 (A)(B)(C)

$f(x)=a(x-1)^2+b$ 的頂點：__________，對稱軸：__________

又 $f(4)>0$，$f(5)<0$，如圖所示：



(A) $f(0)$ (B) $f(-1)$

(C) $f(-2)$ (D) $f(-3)$

(E) $f(-4)$

故選(A)(B)(C)

例 6：將 $y=2x^2+x+1$ 的圖形向左平移 2 個單位，再往上平移 3 個單位，得到函數 $y=f(x)$ 的圖形，求 $f(x)=$__________。(成功高中)

解答 $f(x)=2x^2+9x+14$

主題 5　拋物線 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中係數正、負判別

1　a：$\begin{cases} a>0 \Rightarrow \text{開口向上} \\ a<0 \Rightarrow \text{開口向下} \end{cases}$，若 $|a|$ 愈大，則開口愈小

2　b 的正負：看對稱軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$

3　c 的正負：看與 y 軸交點

4　$D=b^2-4ac$ 的正負：看與 x 軸交點

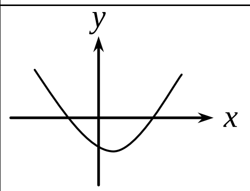
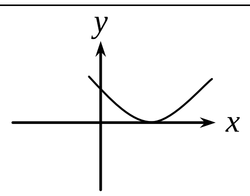
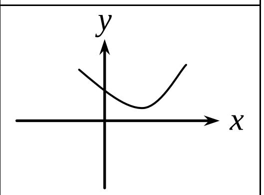
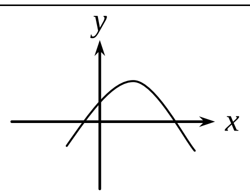
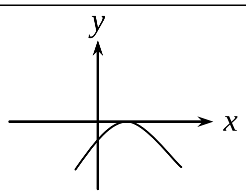
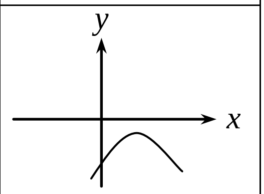
《說明》 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \ \cdots \ ① \\ y=0 \ \cdots \ ② \end{cases}$ 的解即拋物線與 x 軸的交點坐標

由②代入①得 $ax^2+bx+c=0$

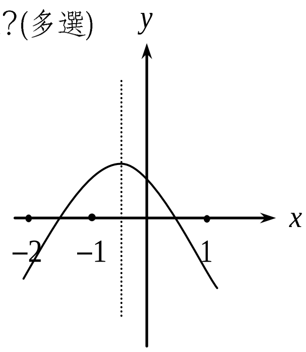
(1) $b^2-4ac>0$，有兩交點

(2) $b^2-4ac=0$，有一交點

(3) $b^2-4ac<0$，沒有交點

$a>0$			
$a<0$			

$\boxed{\text{例 7}}$：$y=f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形如下，下列何者正確?(多選)



(A) $a>0$　(B) $b>0$

(C) $c>0$　(D) $b^2-4ac<0$

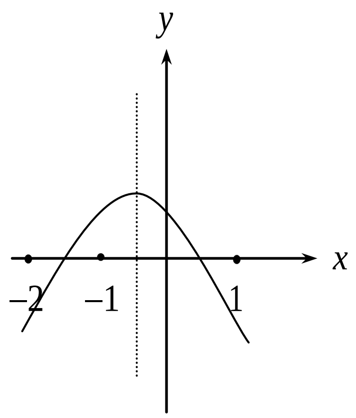
(E) $a+b+c>0$　(F) $a-b+c>0$

(G) $4a-2b+c>0$

$\boxed{\text{解答}}$　(C)(F)

(A)×　∵開口向下:

(B)×　頂點 x 坐標=$-\dfrac{b}{2a}$



(C)○　∵與 y 軸交點 $(0,c)$

(D)×　∵與 x 軸交兩點:

(E)×　∵ $f(1)=$

(F)○　∵ $f(-1)=$

(G)×　∵ $f(-2)=$

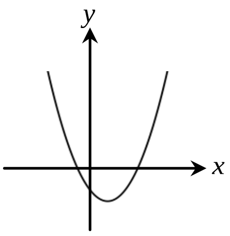
故選(C)(F)

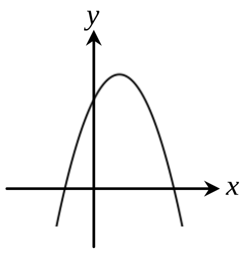
主題 6 二次函數最大值與最小值的討論

1 無限制條件下求極值

$ax^2+bx+c=a\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 在 $\boxed{\qquad}$ 處產生最大值或最小值

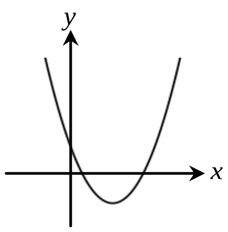
即當 $x=\boxed{\qquad}$ 時，有極值 $y=\boxed{\qquad}$

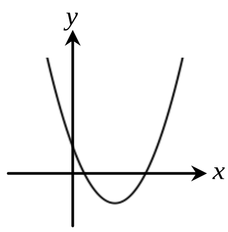


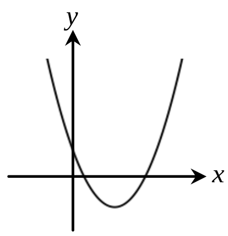


2 有限制條件下求極值：

$ax^2+bx+c=a\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，$\alpha\le x\le\beta$ 在 $\boxed{\qquad}$ 或 $\boxed{\qquad}$ 處產生最大值與最小值







3 $f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$ 的最小值產生在 $x=\boxed{\qquad}$ 處

《證明》$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=3x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2$

$$=3\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^2+a^2+b^2+c^2-\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

當 $x=\dfrac{a+b+c}{3}$ 時，$f(x)$ 有最小值

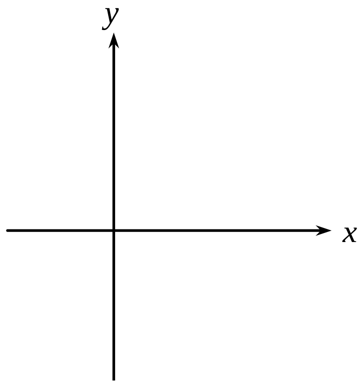
$\boxed{\text{例 8}}$：二次函數 $y=-3x^2+6x+10$

(1)圖形開口______，對稱軸________，頂點________，最大值_____

(2)當 $-1\le x\le 4$，$f(x)$之最小值?，最大值? (新店高中)

$\boxed{\text{解答}}$ (1)向下, $x=1$,(1,13),13 (2)－14,13

(1) $y=-3x^2+6x+10=-3\left(x^2-2x+1\right)+10+3=-3\left(x-1\right)^2+13$



①開口 $\boxed{\text{向}\quad}$

②對稱軸 $\boxed{\quad\quad}$

③頂點 $\boxed{\quad\quad}$

④最大值= $\boxed{\quad\quad}$

(2)當 $-1\le x\le 4$ 時，

x	- 1	1	4
y	1	13	- 14

$f(x)$之最小值=________；最大值=_________

$\boxed{\text{例 9}}$：設 $f(x)=(x+1)^2+(x-2)^2+(x+3)^2+(x-4)^2+(x-8)^2$，$x$ 為實數，當 $x=a$ 時，$f(x)$有最小值 m，求 a，m

$\boxed{\text{解答}}$ $a=2$，$m=74$

$f(x)=(x+1)^2+(x-2)^2+(x+3)^2+(x-4)^2+(x-8)^2$

$=5x^2-20x+94$

$=5\left(x-2\right)^2+74$

當 $x=2$ 時，有最小值=74

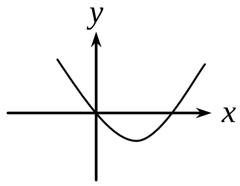
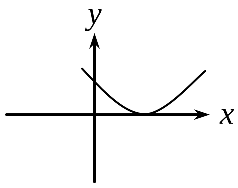
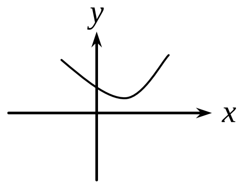
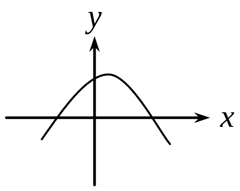
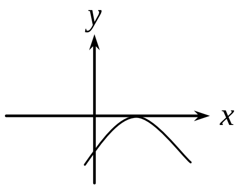
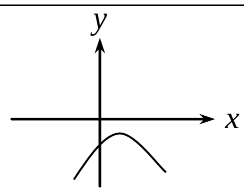
配方求極值

$f(x)=\left(x-x_1\right)^2+\left(x-x_2\right)^2+\cdots\cdots+\left(x-x_n\right)^2$

的極值產生在___________

主題 7 二次函數恆正、恆負的討論

1 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$ 的解即拋物線與 x 軸的交點坐標

	交兩點:	交一點:	沒交點:
$a>0$			
$a<0$			

2 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 恆正、恆負情形：令 $D=b^2-4ac$

(1) $\forall x\in R$, $ax^2+bx+c>0$ 的條件：① $a>0$ ②______

(2) $\forall x\in R$, $ax^2+bx+c\geq 0$ 的條件：① $a>0$ ②______

(3) $\forall x\in R$, $ax^2+bx+c<0$ 的條件：① $a<0$ ②______

(4) $\forall x\in R$, $ax^2+bx+c\leq 0$ 的條件：① $a<0$ ②______

例 10：設 x 為任意實數，則下列何者恆為正數？(A) x^2-2x+2 (B) $-x^2+x+1$

解答 (A)

(A) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$

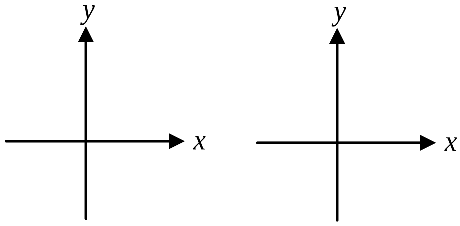
(B) $-x^2+x+1=$______

故選(A)

例 11：若對所有實數 x ,$3x^2+2ax-a\geq 0$ 均成立，則 a 的範圍為何？（83 自）

解答 $-3\leq a\leq 0$

$\because\ \forall x\in R$， $3x^2+2ax-a\geq 0$ 均成立

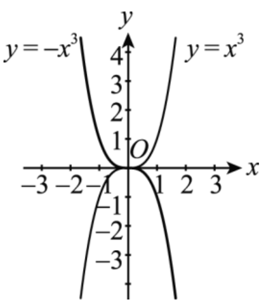


主題 8 單項函數

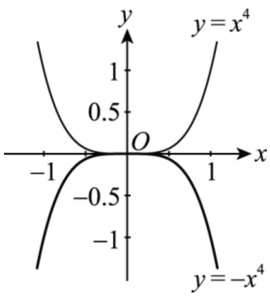
1 型如 $f(x)=ax^n$ 稱為單項函數或冪函數

《例》以描點法所繪出的單項函數 $y=x^3$、 $y=-x^3$、 $y=x^4$、 $y=-x^4$ 之部分圖形如下所示：

(1)



(2)



2 奇函數：若 $f(-x)=-f(x)$，則稱 $f(x)$ 為奇函數

(1) 奇函數的圖形對稱於__________

(2)若 $f(x)=ax^n$ 中 $\boxed{n\in \quad\quad}$ 時， $f(x)$ 為奇函數

$\boxed{3}$ 偶函數：若 $f(-x)=f(x)$，則稱 $f(x)$ 為偶函數

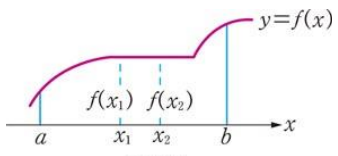
(1)奇函數的圖形對稱於__________

(2)若 $f(x)=ax^n$ 中 $\boxed{n\in\quad\quad}$ 時，$f(x)$ 為偶函數

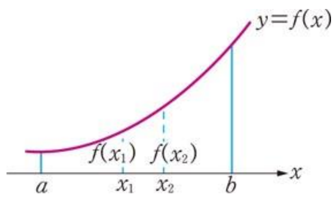
$\boxed{4}$ 遞增與遞減：設 I 是函數 f 定義域內的一個區間，x_1,x_2 是 I 內任意兩個數

(1)遞增函數：若 $x_1<x_2$，恆有 $f(x_1)\le f(x_2)$，稱 f 在 I 上是遞增函數

(2)嚴格遞增函數：若 $x_1<x_2$，恆有 $f(x_1)<f(x_2)$，稱 f 在 I 上是嚴格遞增函數



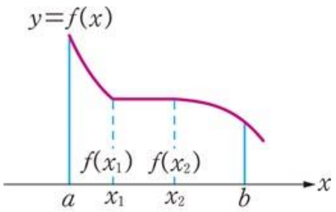
(遞增)



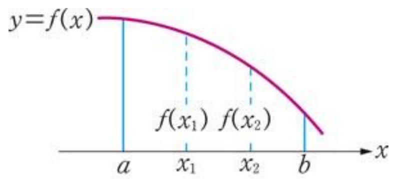
(嚴格遞增)

(3)遞減函數：若 $x_1<x_2$，恆有 $f(x_1)\ge f(x_2)$，稱 f 在 I 上是遞減函數

(4)嚴格遞減函數：若 $x_1<x_2$，恆有 $f(x_1)>f(x_2)$，稱 f 在 I 上是嚴格遞增函數



(遞減)



(嚴格遞減)

$\boxed{5}$ 函數圖形的伸縮與平移

(1) $f(x)=x^n \xrightarrow{\text{鉛直伸縮}a\text{倍}}$ 得 $f(x)=ax^n$

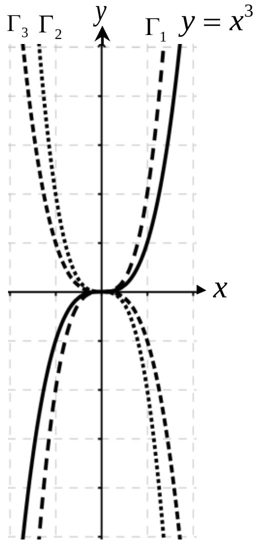
(2) $f(x)=ax^n \xrightarrow[\text{鉛直平移}k\text{單位}]{\text{水平平移}h\text{單位}}$ 得 $f(x)=a(x-h)^n+k$

《說例 2》(連連看）將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上:

$y=-x^3$•　　　　• Γ_1

$y=2x^3$•　　　　• Γ_2

$y=-2x^3$•　　　　• Γ_3

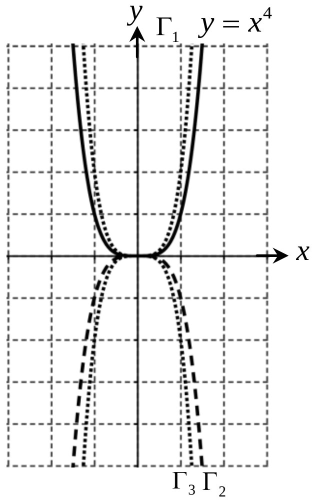


《說例 3》(連連看）將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上:

$y=-x^4$•　　　　•Γ_1

$y=2x^4$•　　　　•Γ_2

$y=-2x^4$•　　　　•Γ_3



例 12：已知函數 $y=x^3$ 的圖形對稱於原點，請問:

(1) $y=2(x-1)^3$ 的圖形對稱於哪一點

(2) $y=2(x-1)^3+3$ 的圖形對稱於哪一點

解答　(1)(1,0)　(2)(1,3)

2-2 多項式的運算

主題1 多項式

1 型如 $f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_1\cdot x+a_0$ 的式子稱為 x 的多項式，其中 n 為正整數或 0，$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是給定的常數。

《說例 1》 $f(x)=-5x^4+3x^3-11x^2+4x-13$

(1)次數表示法：________________

(2)領導係數：________

(3)常數項：________

(4)項數：________

(5) $f(1)=$

(6) $f(x)$ 中係數皆為整數，故稱為 $\boxed{\qquad\text{多項式}}$

(或有理係數多項式或實係數多項式)

《說例 2》 $f(x)=x^3-2x^4+12-5x+3x^5$

(1) $f(x)$ 降冪(次)排列：__________________________

(2) $f(x)$ 升冪(次)排列：__________________________

2 常數多項式：$f(x)=k\,,k\in R$

(1)零多項式 $\Leftrightarrow$ $k=0$ 且 $\deg f(x)$______________

(2)零次多項式 $\Leftrightarrow$ $k\neq 0$ 且 $\deg f(x)=$________

3 x 的多項式之判別：多項式________之後，需滿足下列條件

(1) x 不可在分母　(2) x 不可在絕對值內　(3) x 不可在根號內

(4) x 不可在指數　(5)須為有限項

《**練習**》下列何者為 x 的多項式

(1) $\dfrac{1}{x+1}$　(2) $|x+1|-x^2$　(3) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

(4) $\sqrt{x^2-3x}+2$　(5) $x^3-1=0$　(6) 2^x+1-4x

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2-x$　(8) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

解答

(1)× ∵ x 在____________　(2)× ∵ x 在____________

(3)× ∵ 有____________　(4)× ∵ x 在____________

(5)× ∵ 此為____________　(6)× ∵ x 在____________

(7)○ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2-x$ 為 $\boxed{\qquad\qquad}$ 多項式

(8)○ ∵ $\dfrac{x^2-1}{x+1}=$

4 多項式的域(指多項式__________的範圍)

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(1)整係數多項式 $f(x)\in Z[x] \Rightarrow a_i \in \boxed{\qquad}$　例：$2x^3-7x+1$

(2)有理係數多項式 $f(x)\in Q[x] \Rightarrow a_i \in \boxed{\qquad}$　例：$\dfrac{1}{4}x^2-6x+3$

(3)實係數多項式 $f(x)\in R[x] \Rightarrow a_i \in \boxed{\qquad}$　例：$\dfrac{1}{4}x^2-\sqrt{2}x+4$

例 1：設 $(2a-b-5)x^2+(3a+2b-11)x+(c-2)$ 為零多項式，則 $a+b+c=?$

(屏中)

解答 6

主題 2 多項式相等與求係數

1 多項式相等的條件：①次數相等　②對應項係數相等

2 多項式恆等定理

(1) $\deg f(x)\le n$, $\deg g(x)\le n$，若至少有存在 $n+1$ 個相異值，使得 $f(x)=g(x)$，則兩多項式得 $f(x)\equiv g(x)$

《說例 1》 $2x^2+bx+1=ax^2-6x+c \Rightarrow$ $a=$_____，$b=$_____，$c=$_____

(1)可用符號 $2x^2+bx+1\equiv ax^2-6x+c$ 表示

(2)滿足 $2x^2+bx+1\equiv ax^2-6x+c$ 的 x 有__________個

(2) $\forall x\in R$, $\dfrac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}=k \Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{l}=\dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{n}}$

《說例 2》 $\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+9x+6}=$

《練習 1》 $f(x)=ax^2+bx+c$ 已知 $f(1)=f(2)=f(3)=4$，則 $f(x)=$_______

解答

$\because \begin{cases} f(1)=a+b+c=4 \\ f(2)=4a+2b+c=4 \\ f(3)=9a+3b+c=4 \end{cases}$ 解得 $a=b=0$，$c=4$

《練習 2》設 $f(x)=(a-2)x^2+(b+3)x+c$ 且 $f(0)=f(1)=f(2)=2$，求 $a,b,c=?$

解答

主題 3 多項式加法、減法、乘法、除法運算

1 乘法：設 $P(x)$ 是 m 次多項式，$Q(x)$ 是 n 次多項式，則

(1)和與差的次數不超過兩者的最高次數

(2) $P(x)\cdot Q(x)$ 是 $\boxed{m+n}$ 次多項式，即 $\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$

2 除法原理：$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ (即被除式=除式×商式+餘式)

(1) $q(x),r(x)$ 唯一存在

(2) $\deg r(x)<\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$

3 除法關係式的變形：$\boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\dfrac{r(x)}{g(x)}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{被除式}{除式}=商式+\dfrac{餘式}{除式}$

4 $r(x)=0\Leftrightarrow g(x)\mid f(x)$，即 $g(x)$ 為 $f(x)$ 之因式，$f(x)$ 為 $g(x)$ 之倍式

例 2：設 $f(x)=2x^3+8x-7$，$g(x)=x^2-6x+5$，求

(1) $f(x)+g(x)=?$ (2) $f(x)-g(x)=?$ (3) $f(x)\cdot g(x)=?$

解答

(1) $f(x)+g(x)=(2x^3+8x-7)+(x^2-6x+5)=2x^3+x^2+2x-2$

(2) $f(x)-g(x)=(2x^3+8x-7)-(x^2-6x+5)=2x^3-x^2+14x-12=$

(3) ①橫式計算：分配律展開

$(2x^3+8x-7)(x^2-6x+5)=$

②直式計算

例 3：求 $f(x)=2x^3+3x^2+9$ 除以 $g(x)=2x^2-x+3$ 的商式和餘式

解答

法 1：長除法

$$2x^2-x+3\,\overline{)\;2x^3\;+\;3x^2\;+\;0\cdot x\;+\;9}$$

法 2：分離係數長除法

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & + & 2 & & & & \\ \hline 2-1+3 & 2 & + & 3 & + & 0 & + & 9 \\ & 2 & - & 1 & + & 3 & & \\ \hline & & & 4 & - & 3 & + & 9 \\ & & & 4 & - & 2 & + & 6 \\ \hline & & & & & -1 & + & 3 \end{array}$$

商式=$\boxed{\quad}$；餘式=$\boxed{\quad}$

例 4：若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則 $p=?,q=?$

(94 學測)

解答 $p=3,\ q=8$

$$\begin{array}{r|l} & 1-1+(p+1) \\ \hline 1+1+2 & 1+1+1+p+2+q \\ & 1+1+2 \\ \hline & \quad -1+p+2 \\ & \quad -1-1\;-2 \\ \hline & \quad (p+1)+\;\;4\quad+q \\ & \quad (p+1)+(p+1)+2(p+1) \\ \hline & \qquad\qquad (3-p)+(q-2p-2) \end{array}$$

∵整除　　∴

主題 4 求係數

若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$，則

(1)常數項=$a_。$=________

(2)所有係數和=$a_。+a_1+a_2+\cdots+a_n$=__________

(3)所有偶次項係數和=$\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

(4)所有奇次項係數和=$\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

《說例》 $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$

(1)所有係數和=

(2)常數項=

(3)偶次項係數和=

(4)奇次項係數和=

《證》(3)(4)

令 $x=1$, $x=-1$代入 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\cdots$①

$f(-1)=\ a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots\cdots+(-1)^n a_n\cdots$②

由(①＋②)÷2$\Rightarrow a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

由(①－②)÷2$\Rightarrow a_1-a_3+a_5-\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

$\boxed{\text{例 5}}$：已知 $g(x)=\left(3x^{15}-3x^{13}+5x^{4}-4\right)^{21}$，將 $g(x)$ 展開降次排列，求

(1) $g(x)$ 的常數項　　(2) $g(x)$ 的所有係數和

(3) $g(x)$ 的所有偶次項係數和　　(4) $g(x)$ 的所有奇次項係數和

$\boxed{\text{解答}}$

$g(1)=\left(3\times1^{15}-3\times1^{13}+5\times1^{4}-4\right)^{21}=1$，$g(-1)=\left(3\times(-1)^{15}-3\times(-1)^{13}+5\times(-1)^{4}-4\right)^{21}=1$

主題 5 綜合除法

$\boxed{1}$ 綜合除法

(1)由來：綜合除法為$\boxed{\text{長除法}}$化簡的結果(長除法的另一種型式)

(2)適用時機：除式為$\boxed{\text{一次式}}$且首項係數為$\boxed{\quad\quad}$時(有參考書教除式為二次式)

$\boxed{2}$ 設以 $x-\dfrac{b}{a}$ 除 $f(x)$ 之商式為 $q(x)$，餘式為 r，則

以 $ax-b$ 除 $f(x)$ 之商式為__________，餘式為______

$\boxed{\text{證}}$:

$\because\ f(x)=\left(x-\dfrac{b}{a}\right)\cdot q(x)+r=\dfrac{1}{a}\cdot(ax-b)\cdot q(x)+r=(ax-b)\cdot\dfrac{1}{a}q(x)+r$

$\therefore$ 商式=_______________；餘式=________

【1】綜合除法：除式為 $x-b$ 型

例 6：求 $(5x^3-8x^2+2x-1)\div(x-3)$ 的商式與餘式

解答

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & +7 & +23 & \\
\hline
x-3\,) & 5 & -8 & +2 & -1 \\
 & 5 & -15 & & \\
\hline
 & & +7 & +2 & \\
 & & 7 & -21 & \\
\hline
 & & & +23 & -1 \\
 & & & 23 & -69 \\
\hline
 & & & & 68
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|r}
5 & -8 & +2 & -1 & +3 \\
 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

【2】綜合除法：除式為 $ax-b\,(a\neq 1)$ 型

例 7：求 $f(x)=8x^4+2x^2-6x+5$ 除以 $2x+1$ 之商式及餘式

解答

$\because\ 8x^4+2x^2-6x+5=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\times(8x^3-4x^2+4x-8)+9$

$\therefore\ 8x^4+2x^2-6x+5=(2x+1)\times\boxed{}+\boxed{}$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8 & +0 & +2 & -6 & +5 & -\frac{1}{2} \\
 & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

主題 6 餘式定理與因式定理

$\boxed{1}$ 餘式定理

(1)① $f(x)\div(ax-b)$ 的餘式為 $\boxed{}$ ② $f(x)\div(x-b)$ 的餘式為 $\boxed{}$

(2)使用時機：當除式為一次式且 $f\left(\frac{b}{a}\right)$ 容易計算時，才使用餘式定理

《說例 1》試利用餘式定理完成下列問題

(1)看到 $f(3)=2$ 聯想 $f(x)\div\boxed{}$ 之餘式=______

(2)看到 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=7$ 聯想 $f(x)\div\boxed{}$ 之餘式=______

$\boxed{2}$ 因式定理：(1) $ax-b$ 是 $f(x)$ 的一次因式 $\Leftrightarrow$ ______________

(2) $x-b$ 是 $f(x)$ 的一次因式 $\Leftrightarrow$ ______________

《說例 2》試利用因式定理完成下列問題

(1) $f(2)=0 \Leftrightarrow f(x)$ 有因式 $\boxed{}$

(2) $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f(x)$ 有因式 $\boxed{(或\ x+\frac{3}{2})}$

(3)若 $-\frac{1}{3}$ 是 $f(x)=0$ 的一根，則 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=0$ 即 $f(x)$ 有因式 $\boxed{}$

證：

(1) 餘式定理：

設 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的商式為 $q(x)$，餘式為 r

則 $f(x)=(ax-b)\cdot q(x)+r$，令 $x=\frac{b}{a}$ 代入上式，得 $r=f\left(\frac{b}{a}\right)$

(2)由餘式定理知：$f(x)\div(ax-b)$ 的餘式為 $f\left(\frac{b}{a}\right)$

$\because$ 餘式為 0 $\Leftrightarrow (ax-b)\mid f(x)$，故 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right)=0$

例 8：求 $f(x)=x^{2000}+x^{90}+3$ 除以 $x+1$ 的餘式?

解答 5

例 9：(1) $f(x)=x^7-10x^6+12x^5-25x^4-21x^3+32x^2-46x+100$ 除以 $x-9$ 的餘式為何?

(2)求 $9^7-10\times 9^6+12\times 9^5-25\times 9^4-21\times 9^3+32\times 9^2-46\times 9+100=?$

解答

(1)

	1	−10	+12	−25	−21	+32	−46	+100	9
+)		+9	−9	+27	+18	−27	+45	−9	
	1	−1	+3	+2	−3	+5	−1	+91	

故 $f(x)\div(x-9)$ 的餘式=________

(2) $9^7-10\times 9^6+12\times 9^5-25\times 9^4-21\times 9^3+32\times 9^2-46\times 9+100=$

主題 7　綜合除法的應用

例 10：設 $P(x)=8x^3-4x^2-12x+3$

(1)將 $P(x)$ 表成 $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

(2)估計 P (1.001)=? (估計至小數以下第三位)

(3)求 $P(x)\div(x-1)^2$ 的餘式

(4) $f\left(1+\sqrt{3}\right)=?$

解答

(1)以 $\boxed{\text{連續綜合除法}}$ 求之

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
P(x)= & 8 & -4 & -12 & +3 & 1 \\
 & & 8 & +4 & -8 & \\
\hline
f(x)= & 8 & +4 & -8 & -5 & \\
 & & 8 & +12 & & \\
\hline
g(x)= & 8 & +12 & +4 & & \\
 & & 8 & & & \\
\hline
 & 8 & +20 & & &
\end{array}
$$

① $P(x)=8x^3-4x^2-12x+3$

$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$=(x-1)\cdot\left[a(x-1)^2+b(x-1)+c\right]+d$

② $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)\cdot[a(x-1)+b]+c$

③ $g(x)=a(x-1)+b$

得 $P(x)=8x^3-4x^2-12x+3=$____________________________

(2) P (1.001)=8(1.001－1)^3＋20(1.001－1)^2＋4(1.001－1)－5

=8(0.001)^3＋20(0.001)^2＋4(0.001)－5=__________

(3) $\because \dfrac{P(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{8(x-1)^3+20(x-1)^2+4(x-1)-5}{(x-1)^2}$　　$\therefore$ 餘式=________________

(4) $f\left(1+\sqrt{3}\right)=$

例 11：設 $P(x)=16x^4-48x^3+56x^2-40x+12$

$$= a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$$

(1)試求 a,b,c,d,e

(2)利用(1)求 P(0.499)=?　(至小數以下第三位)

(3)求 $P(x)$ 除以 $(2x-1)^2$ 之餘式=?

解答

(1) $P(x)=a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 16 & -48 & +56 & -40 & +12 & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

(2) $P(0.499)=(0.998-1)^4-2(0.998-1)^3+2(0.998-1)^2-6(0.998-1)+1$

$\doteq$ ________________

(3) $\dfrac{P(x)}{(2x-1)^2}=\dfrac{(2x-1)^4-2(2x-1)^3+2(2x-1)^2-6(2x-1)+1}{(2x-1)^2}$

得餘式=________________

觀念

(1)多項式假設法不唯一

例: $\deg f(x)=2$， $f(x)$可設為何?

① $f(x)=ax^2+bx+c$

② $f(x)=a(x-h)^2+k$

③ $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

④ $f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$

⑤ $f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-1)(x-3)$

上述a,b,c不相等

(2)求估計值時，所需的多項式假設法

①求 $f(2.999)$ $\Rightarrow$ $f(x)$表成$x-3$的型式

②求 $f(5.001)$ $\Rightarrow$ $f(x)$表成$x-5$的型式

③求 $f(-1.998)$ $\Rightarrow$ $f(x)$表成$x+2$的型式

④求 $f(-3.001)$ $\Rightarrow$ $f(x)$表成$x+3$的型式

⑤求 $f(0.333)$ $\Rightarrow$ $f(x)$表成$x-\frac{1}{3}$(或$3x-1$)的型式

⑥求 $f(0.499)$ $\Rightarrow$ $f(x)$表成$x-\frac{1}{2}$(或$2x-1$)的型式

主題 8 求多項式的值

$\boxed{1}$ 利用被 $\boxed{\text{除式=除式×商式+餘式}}$ 將多項式變形，再求多項式的值

《說例1》 已知 $f(x)=x^3+2x^2-2x+5=(x-1)(x^2+3x+1)+6=(x^2-x-1)(x+3)+2x+8$

求(1) $f(1)=?$ (2) $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=?$

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $x=1$ 代入 $f(x)=$________________________ 得 $f(1)=$________

(2) $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 代入 $f(x)=$____________________________

得 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=$________________________

$\boxed{2}$ $f(x)$為一多項式，當 $f(a)$難求時，可利用$\boxed{\text{除法原理}}$變形求值

步驟①：找使 $g(a)=0$ 的多項式 $g(x)$ 當除式

步驟②：若 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$，則 $f(a)=r(a)$

《說例 2》 承上說例 1 中除式 $g(x)$ 的找法

例 12：$f(x)=x^4-5x^2-14x+3$，求 $f\left(1-\sqrt{5}\right)=?$

解答 15

法 1：

法 2：

$\because f(x)=x^4-5x^2-14x+3=(x-1)^4+4(x-1)^3+(x-1)^2-20(x-1)-15$

$\therefore f\left(1-\sqrt{5}\right)=\left(1-\sqrt{5}-1\right)^4+4\left(1-\sqrt{5}-1\right)^3+\left(1-\sqrt{5}-1\right)^2-20\left(1-\sqrt{5}-1\right)-15$

$=\left(-\sqrt{5}\right)^4+4\left(-\sqrt{5}\right)^3+\left(-\sqrt{5}\right)^2-20\left(-\sqrt{5}\right)-15$

$=15$

主題 9 插值多項式

1 多項式假設法

《**說例 1**》已知 $6x^2-42x+84=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$，求 a,b,c 之值

解答 $a=6$，$b=-24$，$c=48$

令 $x=$_____代入得

令 $x=$_____代入得

令 $x=$______代入得

註：$6x^2-42x+84=6(x-1)^2-30(x-1)+48$

《**說例 2**》已知 $deg\ f(x)=2$，且 $f(x)$ 過 $(1,48)$, $(2,24)$, $(4,12)$，則 $f(x)$ 可

設為(1) $f(x)=ax^2+bx+c$

(2) $f(x)=$

(3) $f(x)=$

(4) $f(x)=$

(5) $f(x)=$

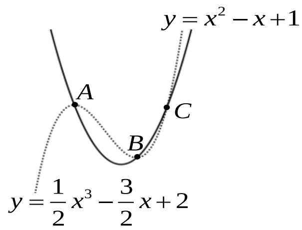
(6) $f(x)=$

2 插值多項式

設 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n) 為坐標平面上 $n+1$ 個相異點，則存在一個 次數不超過 n 的多項式函數 $y=f(x)$ 通過這 $n+1$ 個點，像這樣的多項式，稱為此 $n+1$ 個點的插值多項式。

(1)插值多項式為通過此 $n+1$ 個點的 　　　　多項式 (次數不大於____次)

《說例》①通過 $A(-1,3)$， $B(1,1)$， $C(2,3)$ 的插值多項式為 $y=x^2-x+1$



②通過 $R(1,1)$、 $S(2,2)$、 $T(3,3)$ 的插值多項式為 $y=x$

(2)插值多項式具有唯一性，可用不同的形式呈現，但化簡後皆相等

3 牛頓插值法

$f(x)$ 為過相異三點 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) 的二次插值多項式

設 $f(x)=$____________________________

再由 $f(x_1)=y_1$， $f(x_2)=y_2$， $f(x_3)=y_3$ 解出 a,b,c

4 拉革朗日插值法

已知 $f(x)$ 為過相異三點 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) 的二次插值多項式，

(1)設 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_2)(x-x_3)+c(x-x_3)(x-x_1)$，

再由 $f(x_1)=y_1$， $f(x_2)=y_2$， $f(x_3)=y_3$ 解出 a,b,c

(2) $f(x)=(\quad)\cdot\frac{(x-\quad)(x-\quad)}{(\quad-\quad)(\quad-\quad)}+(\quad)\cdot\frac{(x-\quad)(x-\quad)}{(\quad-\quad)(\quad-\quad)}+(\quad)\cdot\frac{(x-\quad)(x-\quad)}{(\quad-\quad)(\quad-\quad)}$

■ n 次插值多項式的假設法：可仿二次插值多項式的假設法類推

例 13：利用拉革朗日插值法求滿足 $f(1)=5$，$f(2)=11$，$f(3)=19$，且次數不超過 2 的多項式 $f(x)$=________________

解答 x^2+3x+1

例 14：設多項式 $f(x)$分別除以 $x-1$，$x-2$，$x-3$所得餘式依次為 5，10，17，且 $f(x)$除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $r(x)$，求

(1) $r(1)$，$r(2)$，$r(3)$的值　(2) $r(x)$　(龍騰版)

解答 (1)5，10，17　(2) x^2+2x+2

2-3 多項式方程式

主題 1 複數

$\boxed{1}$ 虛數與複數產生的原因：為解方程式的需要

(1)解 $x^2=-1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-1}$

(2)解 $x^2=-3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-3}$

(3)解 $x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$

$\boxed{2}$ (1)尤拉規定 $\boxed{}$，稱為$\boxed{\text{虛數單位}}$

(2)虛數表示法：規定$b>0$，$\sqrt{-b}=\boxed{}\Rightarrow$ 實數$\cdot i$

$\boxed{3}$ 複數的標準式：$z=a+bi$ ，$a,b\in R$，其中a稱為$\boxed{\text{實部}}$，b稱為$\boxed{\text{虛部}}$

(1) $z=a+bi$的共軛複數$\bar{z}=\boxed{}$

《例》① $\overline{4+3i}=$

② $\bar{2}=\overline{2+0i}$

③ $\overline{-4i+1}=$

(2)複數系C：所有複數$a+bi$的集合

$$C:\begin{cases}(1)\ \text{若}b=0,\text{則}a+bi=a\in R\\(2)\ \text{若}a=0,b\neq0,\text{則}a+bi=bi\text{稱為純虛數}\\(3)\ \text{若}a\neq0,b\neq0,\text{則}a+bi\text{稱為雜虛數}\end{cases}$$

$\boxed{4}$ i^n 的循環性

(1) ① $i=$ ② $i^2=$

③ $i^3=$ ④ $i^4=$

(2) ① $i^{4k+1}=$ ② $i^{4k+2}=$

③ $i^{4k+3}=$ ④ $i^{4k}=$

《例》化簡 $i^{99}=$

(3) $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0$

$\boxed{5}$ 虛數不可比$\boxed{\text{大小}}$，沒有$\boxed{\text{次序性}}$

《例》是非題：$5i>3i^2$ (　　)

$\boxed{6}$ 複數相等：設 a,b,c,d 為實數

(1) $a+bi=0 \Leftrightarrow$ ____________________

(2) $a+bi=c+di \Leftrightarrow$ ____________________

例 1：是非題：

(　　) (1)若 a 是實數，則 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ (高雄女中)

(　　) (2)已知 $a,b\in C$，若 $a^2+b^2=0$，則 $a=b=0$ (師大附中)

解答 (1)× (2)×

(1)× ①若 $a>0$，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

②若 $a<0$，$\sqrt{-a}\neq\sqrt{a}\,i$

(2)× 反例：

例 2：$i+i^2+i^3+\cdots+i^{99}=?$

解答 -1

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{99}=$

主題 2 複數運算

1 虛數的運算法則

(1)虛數運算時，先化為 $\boxed{\qquad\qquad}$，再運算

(2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{ab}\ , & \begin{array}{c|c|c|c} a & & & \\ \hline b & & & \end{array} \\ -\sqrt{ab}\ , & \begin{array}{c|c} a & \\ \hline b & \end{array}\end{cases}$

(3) $b\neq 0\ ,\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ , & \begin{array}{c|c|c|c} a & & & \\ \hline b & & & \end{array} \\ -\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ , & \begin{array}{c|c} a & \\ \hline b & \end{array}\end{cases}$

《例 1》是非題：(　　) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-5}=\sqrt{-4\times(-5)}=\sqrt{20}$

《例 2》① $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$

② $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}\,i=\sqrt{-15}$

③ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\,i=\sqrt{15}\,i=\sqrt{-15}$

④ $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=$

《例 3》當 $a<0,b<0$ 時，$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$

$=$____________________________

《例 4》① $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=$

② $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=$

$\boxed{2}$ 複數的四則運算：複數四則運算後依舊為 $\boxed{\text{複數}}$

(1) $(3+2i)+(5+4i)=$

(2) $(7+4i)-(3-2i)=$

(3) $(3+2i)(5-3i)=$

(4) $(5+3i)(5-3i)=$

(5) $\dfrac{3+2i}{5+3i}=\dfrac{(3+2i)\cdot(\qquad\qquad)}{(5+3i)\cdot(\qquad\qquad)}=$

(6) $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in R$

$\boxed{3}$ 複數可以依循 $\boxed{\text{數的運算規則}}$ 去運算：設 z_1， z_2， z_3 都是複數

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$； $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (交換律)

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$； $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ (結合律)

(3) $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1z_3+z_2z_3$； $z_3\cdot(z_1+z_2)=z_3z_1+z_3z_2$ (分配律)

(4) $0+z_1=z_1$； $1\cdot z_1=z_1$ (單位元素)

例 3：設 $i=\sqrt{-1}$，則下列何者正確? (多選)

$(A)\sqrt{-144}=12i$ $(B)\sqrt{-25}=-5i$ (C) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=-6$

$(D)\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{3}{2}i$ $(E)\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{3}{2}i$

解答 (A) (C)

(A)○ $\because\sqrt{-144}=$

(B)× $\because\sqrt{-25}=$

(C)○ $\because\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=$

(D)× $\because\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}=$

(E)× $\because\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{-4}}=$

例 4：化簡 $\left(\dfrac{3}{\sqrt{-2}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{-24}}{15i}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{-4}\right)\cdot\left(\dfrac{625}{\left(\sqrt{-25}\right)^{3}}\right)$=?

解答 $-\dfrac{3}{2}$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{-2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{-24}}{15i}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{-4}\right)\cdot\left(\frac{625}{\left(\sqrt{-25}\right)^{3}}\right)=$$

主題3 共軛複數的運算

設 z 與 w 為兩複數，其共軛複數分別為 $\bar{z}$ 與 $\bar{w}$

(1) $\bar{\bar{z}}=$　　(2) $\overline{z+w}=$　　(3) $\overline{z-w}=$

(4) $\overline{z\cdot w}=$　　(5) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=$　　(6) $\overline{z^n}=$

(7) $z\in R\Leftrightarrow \bar{z}=z$

記法：四則運算後取共軛複數與先取共軛複數再四則運算的結果相同

《**說例**》設 $z=3-2i$，$w=4+5i$，驗證下列各式相等

(1) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$　(2) $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

解答

(1)左式 $=\overline{z+w}=\overline{(3-2i)+(4+5i)}=$

右式 $=\bar{z}+\bar{w}=\overline{3-2i}+\overline{4+5i}=$

(2)左式 $=\overline{z\cdot w}=\overline{(3-2i)\cdot(4+5i)}=\overline{22+7i}=$

右式 $=\bar{z}\cdot\bar{w}=\overline{3-2i}\times\overline{4+5i}=$

例 5：求 $\dfrac{7-4i}{-2+3i}$ 的共軛複數

解答　$-2+i$

$\because \dfrac{7-4i}{-2+3i}=\dfrac{(7-4i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=\dfrac{-14-21i+8i+12i^2}{(-2)^2-(3i)^2}=\dfrac{-26-13i}{13}=-2-i$

$\therefore \overline{\left(\dfrac{7-4i}{-2+3i}\right)}=$

主題 4 代數基本定理與方程式實根的幾何意義

1 代數基本定理：設 $f(x)$ 是一個次數大於零的複係數多項式，則 $f(x)=0$ 至少有一複數解

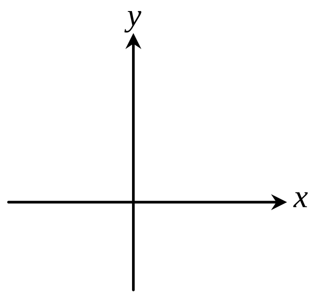
《推論》 n 次方程式 $f(x)=0$ 恰有 n 個複數根(含重根)

2 方程式實根的幾何意義

設方程式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$，$a_n\neq 0$

則 $f(x)=0$ 的 $\boxed{實根}$ 為 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ $\boxed{交點的\qquad\qquad}$

《說例》 解 $\begin{cases} 拋物線\ \Gamma: y=x^2-x-2\cdots ① \\ x軸: y=0\cdots ② \end{cases}$



由②代入①得：________________

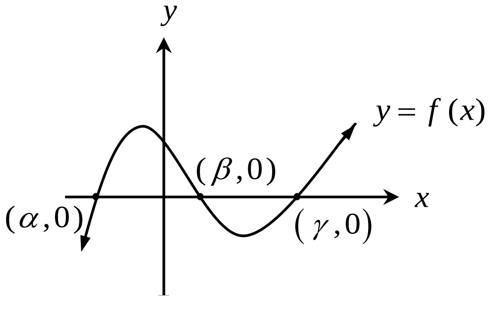
$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Rightarrow x=2$ 或 -1(有兩相異實根)

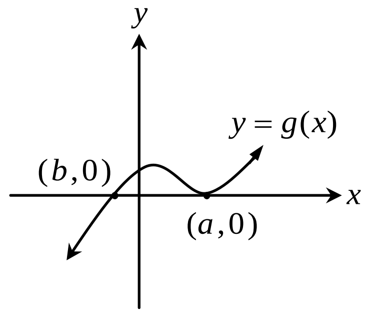
故交點坐標為 $(2,0)$ 或 $(-1,0)$

《練習》 (1)圖一，方程式 $f(x)=0$ 有 3 個相異實根 $\boxed{\qquad\qquad}$

(2)圖二，方程式 $g(x)=0$ 有 3 個實根 $\boxed{\qquad\qquad}$



(圖一)



(圖二)

主題 5 公式解、根與係數關係

$\boxed{1}$ $a,b,c\in R, a\neq 0$， $ax^2+bx+c=0$ 的公式解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

《**觀念**》複係數一元二次方程式____________此公式解

(1) n 次方程式恰有 $\boxed{\quad\text{個解(根)}}$

(2)五次或五次以上的方程式，求解公式不存在

$\boxed{2}$ $a,b,c\in R, a\neq 0$， $ax^2+bx+c=0$ 根的性質：設判別式 $D=b^2-4ac$

(1) ____________ $\Leftrightarrow$ 方程式有兩個相異實根

(2) ____________ $\Leftrightarrow$ 方程式有兩個相等實根(重根)

(3) ____________ $\Leftrightarrow$ 方程式有兩個共軛虛根

《**例**》 $x^2+x+1=0$ 的根 $x=$

$\boxed{3}$ 根與係數關係(韋達定理) $\rightarrow$ 適用於_______________

(1)設 α,β 為 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則① $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ② $\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}$

$\boxed{\text{證}}$：根為 α,β 的一元二次方程式可設為_______________________

(2)設 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三個根為 α,β,γ，則

① $\alpha+\beta+\gamma=$_______ ② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$________ ③ $\alpha\beta\gamma=$_______

$\boxed{4}$ 求一元二次方程式

已知兩根為 α,β，則一元二次方程式可設為_____________________

即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ $\boxed{\text{記法}}$： _________________________

$\boxed{例 6}$：設α,β為$2x^2+3x+6=0$之二根，試求下列各值

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(3) $(4\alpha^2+6\alpha+1)(4\beta^2+6\beta+1)$

$\boxed{解答}$

$\because \alpha,\beta$為$2x^2+3x+6=0$之二根　　$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}\\ \alpha\beta=\dfrac{6}{2}=3\end{cases}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-2\times3=-\dfrac{15}{4}$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{-\frac{15}{4}}{3}=-\dfrac{5}{4}$

(3) $\because \alpha,\beta$為$2x^2+3x+6=0$之二根

$\boxed{例 7}$：設a為實數，令α、β為二次方程式$x^2+ax+(a-2)=0$的兩個根。試問當a為何值時，$|\alpha-\beta|$有最小值？答：$a=$？　(93 指考數乙)

$\boxed{解答}$　$a=2$

由根與係數關係得$\begin{cases}\alpha+\beta=\\ \alpha\beta=\end{cases}$

$\because (\alpha-\beta)^2=$____

$\therefore \sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{a^2-4x+8}=$____________________$\Rightarrow |\alpha-\beta|=\sqrt{(a-2)^2+4}$

當$a=2$時，$|\alpha-\beta|$有最小值=$\sqrt{(2-2)^2+4}=2$

例 8：(1)設$1-i$為$x^2+ax+3-i=0$的一根，則a的值為何?

(A)－3　(B)－2　(C)$-1-i$　(D)2　(E)3　(87 學測)

(2)承(1) $x^2+ax+3-i=0$的另一根為何?

解答　(1)(A)　(2) $2+i$

(1)$\because 1-i$為$x^2+ax+3-i=0$的一根

$\therefore$ ______________________

$\Leftrightarrow -2i+a(1-i)+3-i=0$

$\Leftrightarrow (1-i)a+3-3i=0$

(2)設另一根為β，由______________

得

《觀念加強》

(1) $x^2+ax+3-i=0$為複係數方程式

$\Rightarrow a\in$ __________

(2)遇$ax^2+bx+c=0$兩根為α,β

①利用公式解求之

②聯想根與係數關係

③$x=\alpha,\beta$代入方程式得

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

主題 6 虛根、無理根成雙定理

$\boxed{1}$ 笛卡兒：每一$\boxed{\text{實係數多項式}}$都可分解為__________或__________實係數多項式的乘積

《說例》 $x^3-1=$

$\boxed{2}$ 實係數方程式虛根成雙定理

$f(x)=0$ 為____________方程式，若有一根為 $\boxed{a+bi}$，則必有另一根為 $\boxed{}$

(1)若 $f(x)=0$ 有虛根，則必為$\boxed{\text{偶數個}}$，且兩兩為$\boxed{\text{共軛複數}}$

(2)若 $f(x)=0$ 為一$\boxed{\text{奇次方}}$實係數方程式，則 $f(x)=0$ 至少有一$\boxed{}$

《說例》 $x^3-(2\sqrt{2}+1)x^2+(4+2\sqrt{2})x-4=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-2\sqrt{2}x+4)=0$

$\boxed{3}$ 有理係數方程式無理根成雙定理

$f(x)$ 為____________方程式，若 $f(x)=0$ 有一無理根 $a+b\sqrt{c}$，則必有另一根為 $\boxed{}$

《說例》 $\frac{1}{2}x^2-x-1=0\Rightarrow$

$\boxed{4}$ 若 $f(x)=0$ 有兩複數根 $a\pm bi$，則 $f(x)$ 有因式________________

例 9：設三次方程式 $f(x)=x^3-17x^2+32x-30=0$ 有兩複數根 $a+i$，$1+bi$，其中 a,b 是不為 0 的實數。試求它的實根　(89 學測)

解答　15

(1) $\because f(x)\in R[x]$ 且 $f(x)$ 為三次式

$\therefore a+i$ 與 $1+bi$ 互為__________________

得____________________________

故 $f(x)=0$ 有根 $1+i$，$1-i$

(2)設 $f(x)=0$ 的另一 $\boxed{\quad 根}$ 為 α

由根與係數關係得：$\alpha+(1+i)+(1-i)=$

故另一根為 $\boxed{實根\quad}$

例 10：設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $f(i)=0$ $(i=\sqrt{-1})$，則函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點? (1)0　(2)1　(3)2　(4)3　(5)因 $f(x)$ 的不同而異　(85 學測)

解答　(2)

$\because$ 實係數三次方程式 $f(x)=0$ 有一根____________

$\therefore$ 有另一根_____________

得 $f(x)=0$ 有一____________

故 $y=f(x)$ 與 x 軸有_______交點

$\boxed{\text{例 11}}$：設 a 為有理數且 $1+\sqrt{2}$ 為 $f(x)=x^3+3ax^2+\left(2a^2-1\right)x-2a=0$ 之一根，

則 a 之值為何？（台中女中）

$\boxed{\text{解答}}$ -2

(1) $\because$ $f(x)\in Q[x]$ 且 $f(x)=0$ 有一根 $1+\sqrt{2}$ $\quad\therefore$ $f(x)=0$ 必有另一根 $1-\sqrt{2}$

故 $f(x)$ 有因式______________

(2)

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 1 & +(3a+2) & & \\
\hline
1-2-1 & 1 & +3a & +(2a^2-1) & -2a \\
 & 1 & -2 & -1 & \\
\hline
 & & (3a+2) & +2a^2 & -2a \\
 & & (3a+2) & -2(3a+2) & -(3a+2) \\
\hline
 & & & (2a^2+6a+4) & +(a+2)
\end{array}
$$

$\because$ 整除

$\therefore \begin{cases} 2a^2+6a+4=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \text{ 或 } -2 \\ a=-2 \end{cases}$ 取 $\boxed{\text{交集}}$ 得 $a=-2$

主題 7 整係數方程式有理根的判定法

1 牛頓定理：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_{\circ}\in z[x]$， $a,b\in z$ 且 $(a,b)=1$

若 $f(x)$ 有整係數因式 $ax-b$，則________________

2 方程式有理根的判定法

若整係數方程式 $f(x)=0$ 有整係數一次因式 $ax-b$，即________________

則 $f(x)=0$ 有有理根 $\boxed{x=\qquad}$

$\boxed{\text{註}}$：若 $f(x)$ 因式分解為一次因式或二次因式乘積時，通常取其因式的

$\boxed{\qquad\qquad}$ 的分解法

3 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$

(1)若 $f(x)$ 有因式 $x-1 \Leftrightarrow$ ____________________

(2)若 $f(x)$ 有因式 $x+1 \Leftrightarrow$ ______________________________

$\boxed{\text{例 12}}$：解方程式 $3x^3+5x^2+4x-2=0$

$\boxed{\text{解答}}$ $\frac{1}{3}$ 或 $-1\pm i$

設 $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$ 有整係數一次因式 $ax-b$, 則 ____________________

得 $ax-b$ 可能為 ______________________________

$\boxed{\text{例 13}}$：若 a,b 均為整數且方程式 $x^2-ax+817=0$ 與 $x^2-bx+3553=0$ 有一共同的質數根，則數對 (a,b)=?　(88 社)

$\boxed{\text{解答}}$ (62,206)

(1) 設質數根為 α，則 $x^2-ax+817$ 與 $x^2-bx+3553$ 有公因式：$\boxed{}$

由牛頓定理得：$\boxed{}$

$\because \alpha \mid (817,3553)=19$ 且 α 為質數　$\therefore \alpha=19$

(2) $x=19$ 代入方程式得 $\begin{cases}19^2-19a+817=0\\19^2-19b+3553=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=62\\b=206\end{cases}$

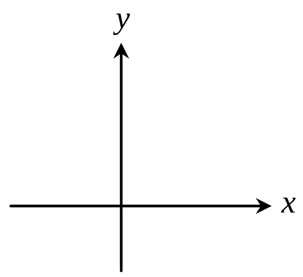
主題 8 勘根定理：用來求方程式根的＿＿＿＿＿或＿＿＿＿＿＿

設 $f(x)=0$ 為一實係數多項方程式，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則在 a,b 之間至少有一實根 α，使得 $f(\alpha)=0$

《說明》

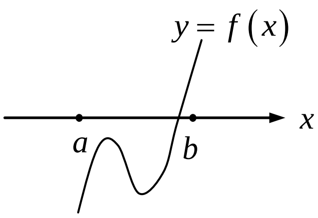
(1) $f(x)=0$ 的實根即方程組 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ 交點的 $\boxed{x\text{ 坐標}}$

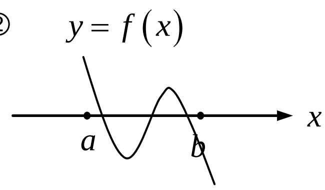
$\boxed{\text{例}}$: $\begin{cases} \text{拋物線}: y=x^2-x-2\cdots ① \\ x\text{軸}: y=0\cdots ② \end{cases}$

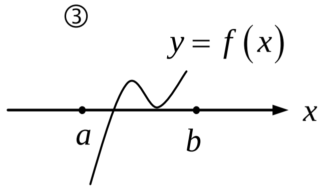


(2) $f(a)\cdot f(b)<0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 在 (a,b) 之間，恰有 $\boxed{\quad\quad\text{數個實根}}$

即 $f(x)=0$ 至少有一實根

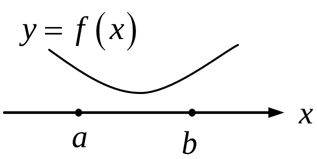
①


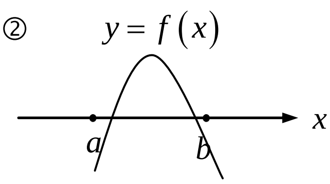
②


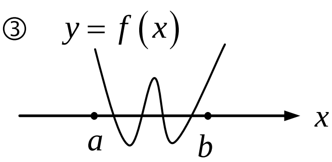
③


(3) $f(a)\cdot f(b)>0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 在 (a,b) 之間，恰有 $\boxed{\quad\quad\text{數個實根}}$ 或 $\boxed{\quad\quad\text{個實根}}$

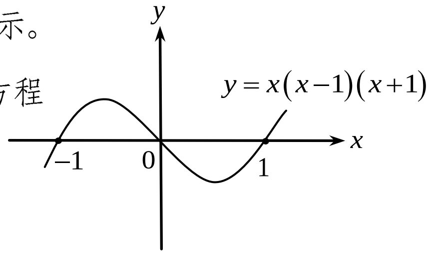
即可能沒有實根

①


②


③


例 14：已知 $y=x(x-1)(x+1)$ 之圖形如下圖所示。



今考慮 $f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$，則方程式 $f(x)=0$

(A)有三個實根

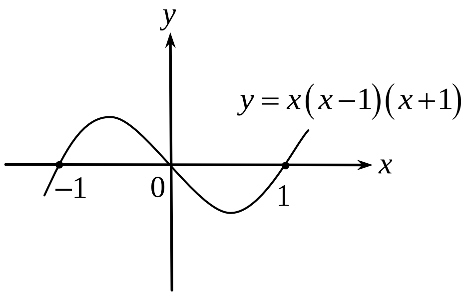
(B)當 $x<-1$ 時，恰有一實根(有一實根且僅有一實根)

(C)當 $-1<x<0$ 時，恰有一實根　　(D)當 $0<x<1$ 時，恰有一實根

(E)當 $1<x$ 時，恰有一實根　　(88 日大)

解答　(A)(B)

如圖所示



(A)○　$\because y=f(x)$ 與 x 軸有三交點

$\therefore f(x)=0$ 有 $\boxed{\quad}$ 個實根

(B)○　$\because$ 當 $-1<x$ 時，$f(x)=0$ 與 x 軸有 $\boxed{\quad}$ 個交點　$\therefore f(x)=0$ 有 $\boxed{\quad}$ 個實根

同理可得(C)×　(D)×　(E)×

例 15：三次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 在下列那些連續整數之間有根?

(A)-2 與 -1 之間　(B)-1 與 0 之間　(C)0 與 1 之間　(D)1 與 2 之間

(E)2 與 3 之間　　(88 學測)

解答　(A)(B)(D)

令 $f(x)=x^3+x^2-2x-1$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	-1	-1	7	29

例 16：方程式 $f(x)=x^3-3x^2-4x+11=0$

(A)沒有實根　(B)有一個實根　(C)有兩個實根

(D)有三個不等的實根　(E)以上皆非　(57 自然組)

解答 (D)

$f(x)=x^3-3x^2-4x+11$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$		-1	11	11	5	-1	-1	11	

說明：$f(x)$ 除以 $x+3$ 與 $x-4$ 的商式與餘式，由綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -4 & +11 & -3 \\ & -3 & +18 & -52 & \\ \hline 1 & -6 & +14 & -41 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -4 & +11 & +4 \\ & +4 & +4 & +0 & \\ \hline 1 & +1 & +0 & +11 & \end{array}$$

得① $f(x)=(x+3)(x^2-6x+14)-41$　② $f(x)=(x-4)(x^2+x)+11$

用勘根定理的解題要領

(1)根的範圍由＿＿＿＿＿＿＿開始找

(2)當 x 的值越代越大(或越小)，多項式值的正負最後由＿＿＿＿＿＿＿＿決定

$\boxed{\text{例 17}}$：設 x 為一正實數且滿足 $x\cdot 3^x=3^{18}$；若 x 落在連續正整數 k 與 $k+1$ 之間，則 $k=?$ (94 學測)

$\boxed{\text{解答}}$ 15

$x\cdot 3^x=3^{18} \Leftrightarrow x\cdot 3^x-3^{18}=0$

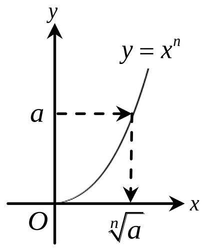
設 $f(x)=x\cdot 3^x-3^{18}$

主題 9 求正 n 次方根

1　方程式 $x^n = a$， $a > 0$ (n 為自然數)恰有一個正實根

2　正 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 的意義：

滿足方程式 $x^n = a$， $a > 0$ (n 為大於 1 的自然數)的"正實根 x"（恰有一個）叫做 a 的正 n 次方根，記作 $\boxed{\qquad}$



(1) $\sqrt[n]{a}$ 是唯一滿足 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 的正實根

(2)① $x^3 = 4$ 有 $\boxed{\quad}$ 個根，但只有一個正實根為 $\boxed{x =\qquad}$

② $x^4 = 16$ 有 $\boxed{\quad}$ 個根，但只有一個正實根為 $\boxed{x =\qquad}$

(3)二次方根又稱平方根，三次方根又稱立方根

(4)化簡下列根式

① $\sqrt[5]{1} =$　　② $\sqrt[3]{27} =$　　③ $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} =$

3　正 n 次方根的乘、除運算：設 a,b 均為正數且 n 為大於 1 的自然數

(1) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} =$　　(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} =$

4　正 n 次方根的乘冪與方根運算：設 a 均為正數且 m, n 為大於 1 的自然數

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m =$　　(2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$

$\boxed{\text{例 18}}$：試證：$\sqrt[3]{10}$是無理數

$\boxed{\text{證明}}$

①$\sqrt[3]{10}$是方程式$x^3=10$唯一的正實根

②設$f(x)=x^3-10=0$有整係數一次因式$ax-b$，則$a|1$且$b|10$

得$ax-b$可能為$x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm5$，$x\pm10$，故$\dfrac{b}{a}=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$

$\because f(\pm1)\neq0$，$f(\pm2)\neq0$，$f(\pm5)\neq0 \because f(\pm10)\neq0$ $\therefore x^3-10=0$沒有有理根

由①、②知$\sqrt[3]{10}$是無理數

2-4 多項式不等式

主題1 不等式的基本性質與區間符號

1 不等式的基本性質

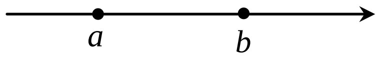
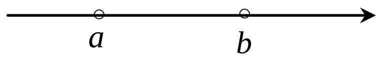
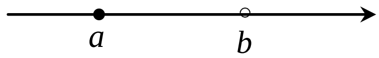
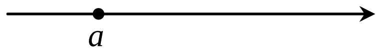
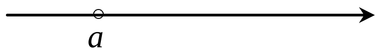
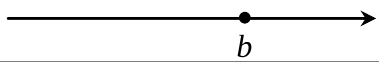
(1)若 $A>B$，則 $A+C>B+C$

(2)若 $A>B$，則 $A-C>B-C$

(3)若 $A>B$ 且 $C>0$，則 $AC>BC$

(4)若 $A>B$ 且 $C<0$，則 $AC<BC$

2 區間符號：$a<b$

記　號	定　義	圖　形
$[a,b]$		
(a,b)		
$[a,b)$		
$(a,b]$		
$[a,\infty)$		
(a,∞)		
$(-\infty,b]$	$-\infty<x\leq b$	
$(-\infty,b)$	$-\infty<x<b$	

《練習 1》已知$-1<x<3$，$-5<y<0$，下列何者正確?

(1)$-6<x+y<3$　　(2)$-4<y-x<-3$

解答

不等式相加、減

已知$a<x<b,c<y<d$

《練習 2》下列何者錯誤?

(1)若$\dfrac{A}{B}>1$，則$A>B$　　(2)若$\dfrac{x+2}{x+1}>0$，則$x+2>0$

解答

分式不等式處理要領

(1) $\dfrac{A}{B}>1$ 且 $B>0\Rightarrow$ ______

(2) $\dfrac{A}{B}>1$ 且 $B<0\Rightarrow$ ______

(3) $\dfrac{A}{B}>0\Leftrightarrow$ ______

(4) $\dfrac{A}{B}<0\Leftrightarrow$ ______

(5) $\dfrac{A}{B}>1$

(6) $\dfrac{A}{B}\geq 0\Leftrightarrow$ ______

(7) $\dfrac{A}{B}\leq 0\Leftrightarrow$ ______

主題2 多項式不等式的解與幾何意義

1 不等式的解

(1)若 $f(x)\in R[x]$，則 $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$ 稱為多項式不等式

(2)若 $x=a\in R$ 滿足 $f(a)\geq 0$，則稱 $x=a$ 是不等式 $f(x)\geq 0$ 的解

注意：不等式的解指的是實數解，虛數不能比大小，故不等式只限在實數的範圍討論

(3)解相同的不等式稱為同義不等式

《**說例 1**》(1)① $2x-3>0$ →一元一次不等式

② $x^2+x-1<0$ →一元二次不等式

(2)下列何者是 $2x+3>0$ 的解：________________

① $x=1$ ② $x=0$ ③ $x=-1$ ④ $x=-2$ ⑤ $x=1+i$

(3)不等式 $3x>9$，$2x>6$，$-5x<-15$ 的解相同皆為 $x>3$

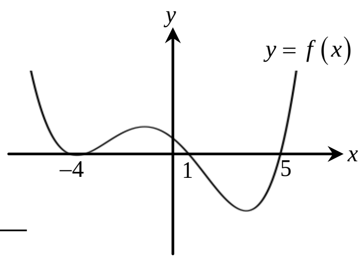
①____________________________

②____

2 由函數圖形找不等式的解：

《**說例 2**》設 $y=f(x)$ 的函數圖形如右，

試求下列各式的解：



(1)方程式 $f(x)=0$ 的解：________________

(2)不等式 $f(x)\leq 0$ 的解：________________

(3)不等式 $f(x)>0$ 的解：________________

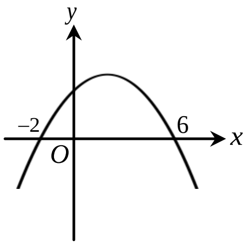
例 1：由下列各式的函數圖形找出不等式的解：

(1) $y=f(x)$ 的函數圖形如圖(一)，求 $f(x)>0$ 的解

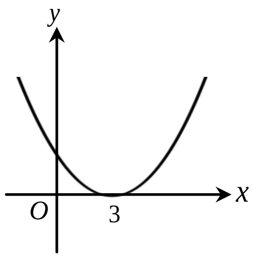
(2) $y=f(x)$ 的函數圖形如圖(二)，求 $f(x)>0$ 的解

(3) $y=f(x)$ 的函數圖形如圖(三)，求 $f(x)\geq 0$ 的解

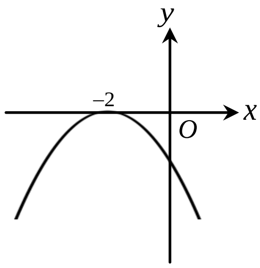
(4) $y=f(x)$ 的函數圖形如圖(四)，求 $f(x)<0$ 的解



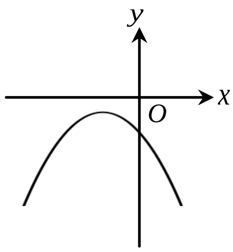
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

解答 (1) $-2<x<6$ (2) x 為任意實數，但 $x\neq 3$ (3) $x=-2$ (4) x 為任意實數

主題 3 解一元一次不等式

設 a， $b \in R, a \neq 0$， 則

類型	$ax+b>0$	$ax+b\geq 0$	$ax+b<0$	$ax+b\leq 0$
$a>0$	$x>-\frac{b}{a}$	$x\geq -\frac{b}{a}$	$x<-\frac{b}{a}$	$x\leq -\frac{b}{a}$
$a<0$	$x<-\frac{b}{a}$	$x\leq -\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$	$x\geq -\frac{b}{a}$

《**說例**》試解下列不等式

(1) $3x+1>0$

(2) $-3x+1>0$

(3) $\frac{x-1}{2}-\frac{2x-5}{3}>\frac{x-5}{6}$

(4) $1<\frac{-3x+1}{4}\leq 7$

$\boxed{\text{例 2}}$：若$(a+b)x+(2a-3b)<0$之解為$x<-\dfrac{1}{3}$

(1)求a,b之關係　(2)　$(a-3b)x+(b-2a)<0$之解為何?　(屏東女中)

$\boxed{\text{解答}}$　(1) $a=2b>0$　(2) $x>-3$

(1)$\because x<-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x<-1\Leftrightarrow 3x+1<0$與$(a+b)x+(2a-3b)<0$解相同

$\therefore$ ________________________ $\Leftrightarrow a=2b>0$

(2)$\because a=2b>0$

$\therefore (a-3b)x+(b-2a)<0$

$\boxed{\text{例 3}}$：解不等式$|2x-7|\le 5$

$\boxed{\text{解答}}$　$1\le x\le 6$

$|2x-7|\le 5$

$\Leftrightarrow$

念

已知$a>0$，

(1)$|x|\le a\Leftrightarrow$ __________________

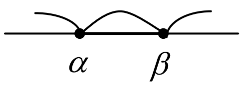
(2)$|x|\ge a$的$\Leftrightarrow$ __________________

主題 4 解一元二次不等式

解 $ax^2+bx+c>0, ax^2+bx+c<0, ax^2+bx+c\geq 0, ax^2+bx+c\leq 0$ 的方法如下：

$\boxed{1}$ $b^2-4ac>0$ 型：必可$\boxed{\text{因式分解}}$將不等式化簡成以下型態($\alpha,\beta\in R$，$\alpha<\beta$)

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 之解為____________________



(2) $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 之解為____________________

記法：大於在兩邊，小於在中間

$\boxed{2}$ $b^2-4ac\leq 0$ 型：配方後，討論求解

【1】 $b^2-4ac>0$ 型

例 4：解下列不等式① $x^2-x-2<0$ ② $x^2-x-2>0$

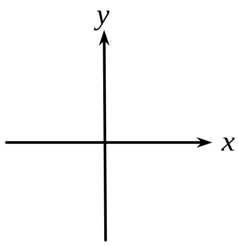
解答

(1) 代數觀點

① $x^2-x-2<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)<0 \Leftrightarrow$ _________________________

② $x^2-x-2>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)>0 \Leftrightarrow$ _________________________

(2)幾何觀點：



① $x^2-x-2<0$ 的解：

② $x^2-x-2>0$ 的解：

例 5：解(1) $2x^2-x-1\geq 0$　(2) $-x^2+3x+4\leq 0$　(3) $x^2-x-1<0$

解答　(1) $x\leq -\frac{1}{2}$ 或 $x\geq 1$　(2) $x\leq -1$ 或 $x\geq 4$　(3) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

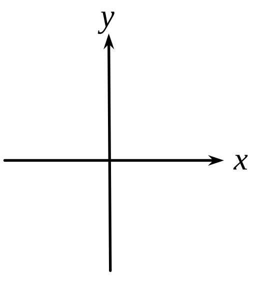
【2】 $b^2-4ac=0$ 型

例 6：解下列不等式

(1) $x^2-4x+4<0$　(2) $x^2-4x+4>0$　(3) $x^2-4x+4\leq 0$　(4) $x^2-4x+4\geq 0$

解答

(1) $x^2-4x+4<0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2<0$ 得



(2) $x^2-4x+4>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2>0$ 得

(3) $x^2-4x+4\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2\leq 0$ 得

(4) $x^2-4x+4\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2\geq 0$ 得

【3】$b^2-4ac<0$ 型

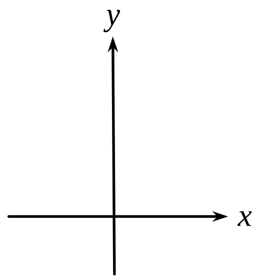
[例 7]：解下列不等式

(1) $x^2+x+1<0$　(2) $x^2+x+1>0$　(3) $x^2+x+1\le 0$　(4) $x^2+x+1\ge 0$

[解答]

(1) $x^2+x+1<0 \Leftrightarrow \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}<0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}<0$，故________________



(2) $x^2+x+1>0 \Leftrightarrow \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}>0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 得____________

(3) $x^2+x+1\le 0 \Leftrightarrow \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\le 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\le 0$，故____________

(4) $x^2+x+1\ge 0 \Leftrightarrow \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\ge 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge 0$ 得____________

【4】已知解求未定係數

[例 8]：設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 之解為何？ (86 學測)

[解答]　$x<-1$ 或 $x>2$

(1)解為 $-2<x<4$ 之不等式為 ________________________________

$\because\ -(x+2)(x-4)>0$ 與 $f(x)>0$ 解相同　$\therefore$ 設 $f(x)=$________________

(2) $\because\ f(2x)<0$　　$\therefore$

$\boxed{\text{例 9}}$：請問對於下列哪些選項，可以找到實數a，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式$x^2+(2-a)x-2a<0$ (1) $-1,0$

(2) $1,2,3,\cdots$(所有的正整數) (3) $-3,-4,-5,\cdots$(所有小於-2的整數)

(4) $97,2008$ (5) $-\pi,\pi$ (π是圓周率) (97 指考數乙)

$\boxed{\text{解答}}$ (1)(4)

$\because x^2+(2-a)x-2a<0\Leftrightarrow$ __________________

$\therefore$①當$a>-2$時，解為________________

②當$a<-2$時，解為________________

(1) ○ 取$a=3$時，解為$-2<x<3$，滿足此條件

(2)× 當$a\to\infty$，解為$-2<x$，滿足此條件，但$a\notin R$

(3)× 當$a\to-\infty$，解為$x<-2$，滿足此條件，但$a\notin R$

(4)○ 取$a=2009$時，解為$-2<x<2009$，滿足此條件

(5)× 找不到實數a滿足

故選(1)(4)

主題 5 解高次不等式

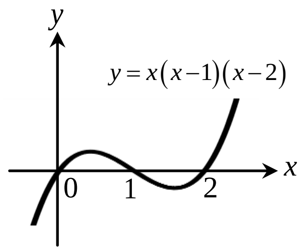
1 圖解高次不等式

(1)將領導係數變為$\boxed{\text{正數}}$，因式分解成一次式與二次式的連乘積

(2)先求$\boxed{}$，再取範圍

《**說例 1**》解① $x(x-1)(x-2)>0$　② $x(x-1)(x-2)\le 0$

$\boxed{\text{法 1}}$：幾何觀點：



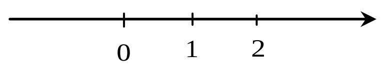
① $x(x-1)(x-2)>0$ 的解：

② $x(x-1)(x-2)\le 0$ 的解：

$\boxed{\text{法 2}}$：代數觀點：

① $x(x-1)(x-2)>0$ 的解：

② $x(x-1)(x-2)\le 0$ 的解：



2 解高次不等式的要領

(1)恆正的因式，直接去掉

(2)恆負的因式，去掉變號

(3)偶次因式→直接去掉，但要考慮$\boxed{\text{零點}}$

(4)奇次因式→降為$\boxed{\text{一次式}}$

《說例 2》解 $(-x^2+2x-3)(x-2)>0$

《說例 3》解 $(x-1)^2(x-2)<0$

《說例 4》解 $(x-1)^2(x+2)\geq 0$

《說例 5》解 $(x-1)^3(x-2)>0$

《說例 6》解 $(x-1)^3(x-2)\leq 0$

例 10：解不等式$(-x^2+3x-2)(x^2+x-12)>0$

解答　$-4<x<1$ 或 $2<x<3$

$(-x^2+3x-2)(x^2+x-12)>0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $-4<x<1$ 或 $2<x<3$

例 11：解下列不等式:

(1) $(x^2+x+1)(x-1)(x+2)^2(x-3)^4(x-5)^5<0$

(2) $(x^2+x+1)(x-1)(x+2)^2(x-3)^4(x-5)^5\le 0$

解答　(1)$1<x<5$但$x\ne 3$　(2)$1\le x\le 5$或$x=-2$

(1) $(x^2+x+1)(x-1)(x+2)^2(x-3)^4(x-5)^5<0$

(2) $(x^2+x+1)(x-1)(x+2)^2(x-3)^4(x-5)^5\le 0$

$\boxed{\text{例 12}}$：解不等式$x^3-5x^2+6x-2\geq 0$

$\boxed{\text{解答}}$ $2-\sqrt{2}\leq x\leq 1$或$x\geq 2+\sqrt{2}$

(1)$\because$ x^3-5x^2+6x-2中$\boxed{\text{所有係數和為 0}}$ $\therefore$有$\boxed{\text{因式}\qquad\qquad}$

由長除法得$x^3-5x^2+6x-2=(x-1)(x^2-4x+2)$

(2) $x^3-5x^2+6x-2\geq 0\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+2)\geq 0$

$\Leftrightarrow$

$\boxed{\text{例 13}}$：試問不等式$(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\leq 0$有多少個整數解?

(92 學測補考)

$\boxed{\text{解答}}$ 17

$(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\leq 0$

主題 7 解分式不等式

(1)分母 B 恆正，$\dfrac{A}{B}>C \quad \Leftrightarrow$

(2)分母 B 恆負，$\dfrac{A}{B}>C \quad \Leftrightarrow$

(3)分母 B 正、負無法判別時

①$\dfrac{A}{B}>0 \Leftrightarrow$ ②$\dfrac{A}{B}\geq 0 \Leftrightarrow$

③$\dfrac{A}{B}<0 \Leftrightarrow$ ④$\dfrac{A}{B}\leq 0 \Leftrightarrow$

⑤$\dfrac{A}{B}>C \Leftrightarrow$

例 14：解不等式$\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-x+1}>0$

解答 $-\dfrac{1}{2}<x<1$

$\because\ x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 恆正

$\therefore\ \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-x+1}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-1<0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)<$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<1$

$\boxed{\text{例 15}}$：解不等式 $\dfrac{2}{x+1}<x$

$\boxed{\text{解答}}$ $-2<x<-1$ 或 $x>1$

$\dfrac{2}{x+1}<x \quad \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1}-x<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-x(x+1)}{x+1}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2-x+2}{x+1}<0$

$\Leftrightarrow$ ______________________

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow -2<x<-1$ 或 $x>1$

$\boxed{\text{例 16}}$：對所有的實數 x，$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$，求 k 的範圍

$\boxed{\text{解答}}$ $1<k<3$

$\because 4x^2+6x+3$ 恆正（$\because D=6^2-4\times4\times3<0$）

$\therefore \dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1 \Leftrightarrow$

例 17：解不等式$\dfrac{x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} \le 0$

解答 $-1 \le x < 1$

$\dfrac{x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} \le 0 \quad \Leftrightarrow$

$\because x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$恆正

$\therefore$不等式化為$(x+1)(x-1) \le 0$，$x \ne 1$

$\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$，$x \ne 1$

$\Leftrightarrow -1 \le x < 1$